

Zur praktischen Anwendung numerischer Analysemethoden für Stabilitätsprobleme

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur

an der Fakultät Bauingenieurwesen
der Bauhaus-Universität Weimar

Hansjörg Lehmkuhl

Weimar, September 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problem	1
1.2	Zielstellung und Vorgehensweise	3
2	Theoretische Grundlagen der Elastostabilität - Übersicht und Begriffsklärung	7
2.1	Einleitung	7
2.2	Zur geschichtlichen Entwicklung der Stabilitätstheorie	11
2.3	Begriffsklärung	13
2.4	Stabilität von Gleichgewichtszuständen	16
2.4.1	Analyse von Potentialdifferenzen	16
2.4.2	Reguläre und kritische Gleichgewichtspunkte	20
2.4.3	Analyse eines kritischen Punktes ($\Pi_2(\Phi) = 0$)	23
3	Methoden und Techniken für erweiterte Stabilitätsanalysen	27
3.1	Einleitung	27
3.2	Pfadverfolgung	28
3.3	Ermittlung kritischer Stabilitätspunkte	30
3.4	Koitorsche Nachbeulanalyse	33
3.5	Koitorsche Nachbeulanalyse - Approximation	38
3.6	Verallgemeinerte Nachbeulanalyse	40
3.6.1	Grundgleichungen	41
3.6.2	Klassifizierung von kritischen Punkten	43
3.6.3	Tangenten im Verzweigungspunkt	43

3.6.4	Asymmetrische und symmetrische Verzweigung	45
3.6.5	Quadratische Pfadinkremente im Verzweigungspunkt	47
3.6.6	Klassifizierung symmetrischer Verzweigungen	49
3.6.7	Durchschlagspunkt	50
3.7	Koitersche und Verallgemeinerte Nachbeulanalyse - ein Vergleich	50
3.8	Umsetzung der Nachbeulanalyse in einer numerischen Stabilitätsanalyse	53
3.8.1	Spezielle Anpassungen im FEM - Kontext	53
3.8.2	Sonderfall $C = 0$	56
3.8.3	Zur Lösung singulärer Gleichungssysteme	57
3.8.4	Zur Wahl von Normierungsbedingungen	59
3.8.5	Ableitungen der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}	61
3.8.6	Berechnungsalgorithmus für eine Nachbeulanalyse bei asymmetrischer Verzweigung	65
3.8.7	Berechnungsalgorithmus für eine Nachbeulanalyse bei symmetrischer Verzweigung	72
3.9	Pfadwechsel	76
3.9.1	Praktisches Vorgehen	76
3.9.2	Berechnungsalgorithmus für einen Pfadwechsel	78
3.10	Imperfekte Strukturen - Koitersche Imperfektionssensitivität	82
3.11	Mehrfachverzweigungen	88
4	Numerische Behandlung ausgewählter Stabilitätsprobleme	91
4.1	Einleitung	91
4.2	Knicken ebener Rahmen - Fortsetzung	92
4.3	Beulen einer Kreisplatte	97
4.3.1	Diskreter Potentialausdruck	98
4.3.2	Gleichgewicht, primärer Pfad, kritischer Punkt	99
4.3.3	Koitersche Nachbeulanalyse	100
4.3.4	Verallgemeinerte Nachbeulanalyse	104
4.3.5	Parameterbeispiel	107
4.4	Beulen von rechteckigen Platten	111
4.4.1	Lastfall konstante Druckspannung σ	112

4.4.2	Lastfall Biegerandspannung σ_1	127
4.4.3	Lastfall Randschubspannung τ	132
4.5	Beulen von kreiszylindrischen Schalensegmenten	136
4.5.1	Systeme und Belastung	138
4.5.2	Lineare Stabilitätsanalysen - Vorbetrachtungen	140
4.5.3	Lineare Stabilitätsanalysen - RB P1, P2	142
4.5.4	Lineare Stabilitätsanalysen - RB F1, F2, F3	144
4.5.5	Diskussion der Ergebnisse zur linearen Stabilität	146
4.5.6	Primäre Pfade - RB P1	148
4.5.7	Primäre Pfade - RB F2	151
4.5.8	Asymptotische Nachbeulanalyse	158
4.5.9	Sekundäre Pfade	161
4.5.10	Imperfektionsanalysen - RB P1	164
4.5.11	Imperfektionsanalysen - RB F2	167
5	Schlussbemerkungen	179
A	Verkürzte Schreibweise für das Potentialinkrement	183
B	Einführendes Beispiel: 2-DOF-Stabsystem	184
C	Berechnungsalgorithmus für eine Pfadverfolgung	192
D	Dokumentation von Rechenergebnissen	199
D.1	Plattenbeulen - Lastfall konstante Druckspannung	200
D.2	Lineare Stabilitätsanalyse - Schalensegment	206
D.3	Nachbeulanalyse - Schalensegment	210

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problem

Aktuelle Projekte des konstruktiven Ingenieurbaus, insbesondere des Stahlbaus, zeichnen sich durch die Verwendung optimierter Strukturen aus, deren Bauteile bzw. Bauteilkomponenten große Schlankheiten aufweisen können. Dies hat zur Folge, dass sowohl die Stabilitätsgefährdung als auch die Komplexität der Stabilitätsprobleme zunehmen und ein erheblicher planerischer Aufwand nötig ist, um eine Konstruktion gegenüber Stabilitätsversagen abzusichern. In der täglichen Ingenieurpraxis gewinnen so die Stabilitätsnachweise immer mehr an Bedeutung und erfordern vom Ingenieur umfangreiche Kenntnisse der Stabilitätstheorie sowie relevanter Nachweisverfahren und Analysemethoden.

Stabilitätsnachweise erfolgen gegenwärtig in der Regel noch nach den analytischen, halb - empirischen Nachweiskonzepten der aktuellen Regelwerke, z.B. [12, 38, 39, 40]. Die Nachweise sind dem Ingenieur vertraut, auf einzelne Bauteilklassen abgestimmt und führen innerhalb der Gültigkeitsgrenzen zu sicheren Bemessungen. Die Regelwerke können jedoch nur einen Teil aller möglichen Bemessungssituationen abdecken. Dies zeigt sich insbesondere bei Platten und Schalen, wo aufgrund der Vielfältigkeit der Konstruktionen eine umfassende Regelung nicht möglich und auch nicht beabsichtigt ist.

Neben den traditionellen Stabilitätsnachweisen werden in zunehmendem Maße numerische Stabilitätsanalysen auf der Basis der Finite - Elemente - Methode durchgeführt. Ein abgestimmtes Regelwerk zum Vorgehen bei solchen Analysen existiert zur Zeit - mit Ausnahme eines ersten Entwurfes [13] - nicht und ist auch in naher Zukunft kaum zu erwarten. Ob solch ein Regelwerk überhaupt benötigt wird und ob eine normative Regelung numerischer Analysen möglich ist, wird aktuell diskutiert. Dennoch kann davon ausgegangen werden, dass auch ohne einen normativen Rahmen die numerischen

Analysemöglichkeiten zukünftig noch stärker als bisher genutzt werden.

Für die gegenwärtige Praxis im konstruktiven Stahlbau ist jedoch festzustellen, dass eine große Kluft zwischen der fortgeschrittenen Theorie und dem Niveau der praktischen Anwendung numerischer Stabilitätsanalysen besteht. Dies zeigt sich in einem sehr eingeschränkten Gebrauch der vielfältigen numerischen Analysemöglichkeiten, einer zum Teil relativ unreflektierten Vorgehensweise mit einer Tendenz zu immer komplexeren FE - Schalenmodellen und einer stark vereinfachten Begriffswelt in Methodik und Theorie. Da bei numerischen Stabilitätsanalysen eine Vielzahl von, möglicherweise auch numerisch bedingten, Erscheinungen auftreten können, sind diese Sachverhalte hier als besonders problematisch anzusehen. Insgesamt ist festzustellen, dass im Bereich der praktisch tätigen Ingenieure der Wissensstand sowohl zu Fragen der Stabilitätstheorie als auch zur numerischen Umsetzung nicht immer den komplizierten Problemstellungen angemessen ist.

Als Beispiel für dieses offensichtliche Missverhältnis sei hier das übliche Vorgehen bei der numerischen Analyse imperfekter komplexer Strukturen genannt. Für eine abgesicherte Tragfähigkeitsaussage werden dabei aufwändige Sensitivitätsanalysen mit verschiedenen Imperfektionsformen, -amplituden und -richtungen durchgeführt. Für die Bestimmung der Gleichgewichtspfade imperfekter Strukturen werden in der Regel rechenzeitintensive Pfadverfolgungsalgorithmen verwendet, Approximationsmethoden sind kaum bekannt. Die Auswahl maßgeblicher Imperfektionsparameter erfolgt nicht nach stabilitätstheoretischen Kriterien, sondern aufgrund von Erfahrung, Parameterstudien und evtl. Vorgaben aus Regelwerken. Außerdem können im Zuge der numerischen Analyse imperfekter Strukturen beispielsweise plötzliche Pfadwechsel auftreten, die festzustellen und aus numerischer sowie stabilitätstheoretischer Sicht zu beurteilen sind.

Die Besonderheit von numerischen Stabilitätsuntersuchungen besteht darin, dass es - aufgrund einer starken Problemabhängigkeit - kaum möglich ist, „black box“ - Anwendungen zu realisieren. Programmtechnisch aufbereitete Schritte in allgemeinen, kommerziellen FE - Programmen oder wissenschaftliche Spezialprogramme zur numerischen Stabilitätsanalyse stehen nicht allgemein zur Verfügung. Trotzdem sollten wenigstens einige der erweiterten Analysemöglichkeiten genutzt werden, um sichere Tragfähigkeitsaussagen für stabilitätsgefährdete Konstruktionen bzw. Bauteile zu erhalten. Damit steht der Ingenieur vor der Aufgabe, bereits vorhandene FE - Programme um Berechnungsalgorithmen für Stabilitätsuntersuchungen zu erweitern.

Hierbei zeigt sich, dass dafür die theoretischen Grundlagen nur in unzureichendem Maße in einer Form zur Verfügung stehen, die eine programmtechnische Umsetzung ermöglichen. Eine kaum überschaubare Materialfülle, unterschiedlichste Formulierungen ein und desselben mathematischen Sachver-

haltes und wenig anschauliche Darstellungen erschweren die programmtechnische Aufbereitung der Verfahren. Grundwissen wird entweder in streng mathematischen Formelapparaten oder extrem verkürzt, zum Teil auch unkorrekt und widersprüchlich wiedergegeben. Details zur numerischen Umsetzung sind kaum zu finden, über auftretende numerische Probleme wird im Allgemeinen kaum berichtet. Häufig wird der Eindruck erweckt, dass eine Einbindung von erweiterten Verfahren in eine numerische Stabilitätsuntersuchung unproblematisch sei und ähnlich standardisiert wie für andere numerische Verfahren erfolgen kann.

Daneben sind in der Literatur kaum nicht akademische Anwendungsbeispiele dokumentiert, in denen die Möglichkeiten numerischer Stabilitätsanalysen auch aus praktischer Sicht bewertet werden. Schließlich sind kaum konkrete Beispiele für Berechnungsabläufe zu finden, die den in der Praxis tätigen Ingenieur bei der eigenen programmtechnischen Umsetzung unterstützen.

1.2 Zielstellung und Vorgehensweise

Den Ausgangspunkt für diese Arbeit bildeten numerische Analysen zum Stabilitätsverhalten dünnwandiger Bauteile aus Stahl. Es wurden lineare Stabilitätsanalysen für die perfekten und Sensitivitätsuntersuchungen für imperfekte Strukturen durchgeführt. Dabei kam es jedoch teilweise zu plötzlichen Pfadwechseln, Fehleinschätzungen kritischer Lastniveaus und starken Konvergenzproblemen während der nichtlinearen Rechnung. Für eine zufriedenstellende Interpretation dieser Erscheinungen reichten die verfügbaren Analysemöglichkeiten und die Kenntnisse zu numerischen und stabilitätstheoretischen Sachverhalten nicht aus. Die auftretenden, als „gekoppelte Instabilitäten“ bezeichneten Stabilitätsprobleme stellen ein aktuelles Forschungsgebiet dar. Die Theorie hierzu ist überaus komplex und schließt eine numerische Stabilitätsanalyse mit vertretbarem Aufwand in der Praxis gegenwärtig aus.

Es zeigte sich aber, dass zusätzliche Analysemöglichkeiten existieren, die in vereinfachter Form auch für nicht gekoppelte Instabilitäten eingesetzt werden können und die Qualität numerischer Stabilitätsanalysen wesentlich erhöhen. Da die zusätzlichen Methoden in der Ingenieurpraxis weitgehend unbekannt sind, erscheint es aus praktischer Sicht unumgänglich, die vorhandene und weiter wachsende Diskrepanz zwischen den umfangreichen theoretischen Möglichkeiten und der gegenwärtigen Praxis abzubauen. Hiermit ist das Ziel dieser Arbeit umrissen. Insbesondere soll eine Basis geschaffen werden, die es dem praktisch tätigen Ingenieur ermöglicht, den eigenen Methodenvorrat zu erweitern. Durch die Anwendung der zusätzlichen Analysemethoden innerhalb einer numerischen Stabilitätsanalyse stehen ihm weitere

wichtige Informationen zur Verfügung, die eine sichere Einschätzung des Verhaltens einer schlanken, stabilitätsgefährdeten Struktur zulassen.

Für eine praktische Herangehensweise fehlen konsistente Grundlagen. Deshalb werden die Grundzüge einer „modernen“ Stabilitätstheorie und die wesentlichen Methoden für numerische Stabilitätsanalysen einheitlich und in einer nachvollziehbaren Weise systematisch aufbereitet. Dies geschieht nicht vorrangig mathematisch - theoretisch, sondern immer aus der Sicht einer praktischen Anwendung. Sowohl für die Behandlung grundlegender Aspekte der Elastostabilität als auch der erweiterten Analysemethoden wird deshalb durchgängig eine diskrete Formulierung des Potentials gewählt. Dies ermöglicht, zusammen mit der verwendeten Schreibweise der Vektor- und Matrizenalgebra, einen direkten Zusammenhang mit bekannten Größen der Finite - Elemente - Methode herzustellen. Darüber hinaus wird dadurch eine konkrete programmtechnische Umsetzung der Algorithmen unterstützt.

Im Mittelpunkt einer Übersicht zu den erweiterten Analysemethoden steht die Nachbeulanalyse im kritischen Punkt. Dabei werden sowohl die Koiter-sche Nachbeulanalyse als auch eine verallgemeinerte Form der Nachbeulanalyse mit dem Ziel dargestellt, Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Herangehensweisen deutlich zu machen. Daneben werden die Approximation sekundärer Pfade, die Näherung für Gleichgewichtspfade imperfekter Strukturen und Pfadwechselprozeduren behandelt.

Einen weiteren Schwerpunkt bilden die Darstellungen zur programmtechnischen Umsetzung der Methoden innerhalb eines Finite - Elemente - Programms. Dafür werden wichtige Punkte wie die Behandlung singulärer Gleichungssysteme, die Ermittlung von Lösungen für die Tangenten an die Gleichgewichtspfade, Pfadverfolgungs- und Pfadwechselstrategien oder numerische Differentiationsverfahren angesprochen. Die beschriebenen Vorgehensweisen können anhand von Beispielimplementierungen leicht nachvollzogen werden.

Innerhalb der Arbeit wurden für mehrere Strukturen umfangreiche numerische Stabilitätsanalysen unter Verwendung der beschriebenen Methoden und Rechenabläufe durchgeführt, deren Ergebnisse ausführlich dokumentiert und diskutiert werden. Ausgehend vom einfachen ebenen Rahmensystem wurde mit der kreisförmigen Platte ein mehr akademisches Beispiel ausgewählt, das neben einer numerischen auch eine sehr anschauliche analytische Vorgehensweise zulässt. Als Beispiele für mehr praxisorientierte Anwendungen werden numerische Stabilitätsuntersuchungen zum Platten- und Schalenbeulen behandelt, wobei die praktische Sicht auf die Möglichkeiten und Grenzen der verwendeten Methoden und nicht das Aufdecken bisher unbekannter mechanischer Sachverhalte im Vordergrund steht.

Die Arbeit beschränkt sich auf statische Analysen elastischer stabilitätsgefährdeter Strukturen. Ziel der Untersuchungen war nicht, das Strukturverhal-

ten bis zum endgültigen Tragfähigkeitsverlust zu verfolgen. Dazu wären eine Einbeziehung dynamischer Größen sowie des elasto - plastischen Werkstoffverhaltens nötig. Für eine praktische Einschätzung des Stabilitätsverhaltens ist in der Regel die Kenntnis des Kollapszustandes uninteressant. Beispielsweise besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der Imperfektionssensitivität einer Struktur und dem anfänglichen Verlauf des sekundären Pfades, der allein durch eine elastische Betrachtung ermittelt werden kann.

Für die numerischen Analysen wurde das Software Paket *Stang* [6] genutzt. Dieses Finite - Elemente - Programm erlaubt durch seine Meta - Sprache eine freie Zusammenstellung von Kommandoabfolgen. Damit kann jeder gewünschte Berechnungsablauf allein mit den vorhandenen Kommandos realisiert werden. Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix, ihre Faktorisierung, das Lösen eines Eigenwertproblems usw. sind einzelne Kommandos, die zu einem Berechnungsablauf kombiniert werden, der dann Schritt - für - Schritt abgearbeitet wird. Eine ausführliche Beschreibung des Programms findet sich in [2]. An jeder Stelle des Rechenablaufes kann die Ausführung angehalten werden, um Objekte ein- und auszulesen und zusätzliche Rechenoperationen durchzuführen. Dies erlaubt, im Gegensatz zu anderen kommerziellen Programmen, eine hohe Flexibilität in der Gestaltung von Rechenabläufen. Für die notwendigen Rechenoperationen mit Matrizen und Vektoren konnte ausschließlich auf die vorhandenen Kommandos zur linearen Algebra zurückgegriffen werden. In der Arbeit angegebene Beispielimplementierungen zeigen die Umsetzung im FE - Programm *Stang*. Die leicht nachvollziehbaren Kommandoabfolgen ermöglichen jedoch prinzipiell eine Übertragung auch auf andere FE - Programme.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen der Elastostabilität - Übersicht und Begriffsklärung

2.1 Einleitung

Im Mittelpunkt der Elastostabilitätstheorie steht die Untersuchung kritischer Gleichgewichtszustände. Mit Begriffen wie Knicken, Beulen usw. wird traditionell allein der Augenblick, innerhalb einer „modernen“ Stabilitätstheorie der gesamte Vorgang des Stabilitätsverlustes beschrieben. Hierin kommt eine Erweiterung der Begriffswelt zum Ausdruck, die im Rahmen numerischer Stabilitätsanalysen notwendig ist, sich jedoch im gegenwärtigen konstruktiven Ingenieurbau kaum widerspiegelt.

Dies wird deutlich in der vorrangigen Ausrichtung auf Knicklasten und Beulspannungen, auf die so genannten „Euler - Fälle“ für Einzelstäbe, Knicklängenbeiwerte für Rahmensysteme usw.. Damit verbunden ist häufig die Vorstellung von einem plötzlichen Stabilitätsverlust mit angeblich unendlichen Knick- oder Beulverformungen. Die Existenz eines - praktisch relevanten - Nachbeulbereiches mit endlichen Verformungen wird dagegen nicht ausreichend beachtet. Insgesamt sind die Anschauungen zur Stabilität noch weitgehend von den klassischen linearisierten Theorien geprägt. Das analytische Vorgehen in den zugrundeliegenden, praxisnahen Standardwerken wie [8] oder [42] war immer auf praktisch verwertbare Berechnungsformeln ausgerichtet, wodurch zum Teil grundlegende, durchaus umfassend vorhandene, theoretische Aussagen in den Hintergrund traten.

Für einen erweiterten Stabilitätsbegriff steht symbolisch Abb. 2.1, wo verschiedene Verzweigungsprobleme dargestellt sind: eine asymmetrische (a), eine stabil symmetrische (b) und eine instabil symmetrische Verzweigung (c).

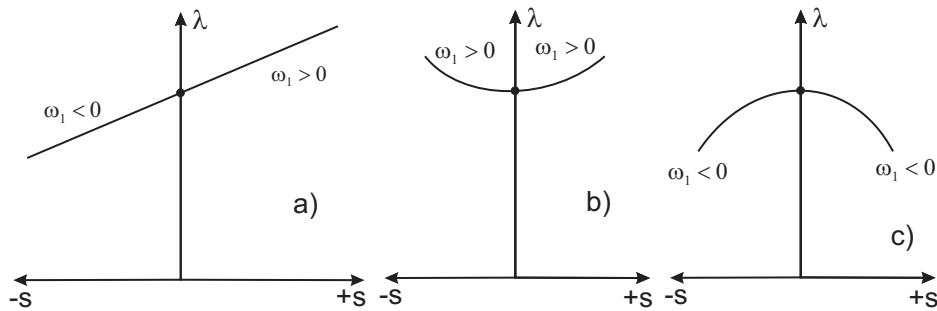


Abbildung 2.1: Verschiedene Verzweigungsprobleme und dazugehörige sekundäre Pfade

Die sekundären, hier von einem Pfadparameter s abhängigen Gleichgewichtspfade verlaufen im Nachbeulbereich und lassen sich durch Nachbeulanalysen bestimmen. Zwischen den sekundären Pfaden und der Imperfektionssensitivität einer Struktur besteht ein direkter Zusammenhang mit einer großen praktischen Bedeutung.

Um die Notwendigkeit einer Begriffsklärung zu veranschaulichen, wird hier kurz eine praktische Problemstellung aufgegriffen:

Für die Stabilitätsuntersuchung eines Zweigelenkrahmens nach Abb. 2.2 wird, um herkömmliche Berechnungsformeln anwenden zu können, die ursprüngliche Laststellung - z.B. Fälle **B** bzw. **C** - im Allgemeinen dahingehend geändert, dass die Riegelast auf die Rahmenstiele verteilt wird (Fall **A**). Ob jedoch - in Hinsicht auf das Stabilitätsverhalten - die „a priori“ - Biegung tatsächlich vernachlässigt werden darf, erscheint fraglich. Zur Klärung dieses Sachverhaltes bieten sich numerische Stabilitätsuntersuchungen an.

Der Stahlrahmen nach Abb. 2.2 wird in der Rahmenebene beansprucht und weist bekanntermaßen bei alleiniger Stielbelastung (Fall **A**) ein globales Rahmenknicken in der Beanspruchungsebene mit einer antimetrischen Knickfigur auf. Im Allgemeinen wird davon ausgegangen, dass die antimetrische Knickfigur auch in den Fällen **B** und **C** auftritt. Damit würde es sich dann um ein so genanntes Antimetrie - Symmetrie - Knickproblem handeln: eine Gleichgewichtsverzweigung mit antimetrischer Knickfigur aus einem symmetrischen Biegezustand.

Analytische Untersuchungen für diese, als Verzweigung von Spannungsproblemen II. Ordnung bezeichnete, spezielle Problemgruppe existieren im Wesentlichen nur für ausgewählte einfache Stabprobleme. Aus Stabbetrachtungen abgeleitete Kriterien für das Auftreten solcher Verzweigungsprobleme wie z.B. nach [27] stellten sich, insbesondere für komplexere Tragsysteme wie Rahmen, als nicht hinreichend heraus [42].

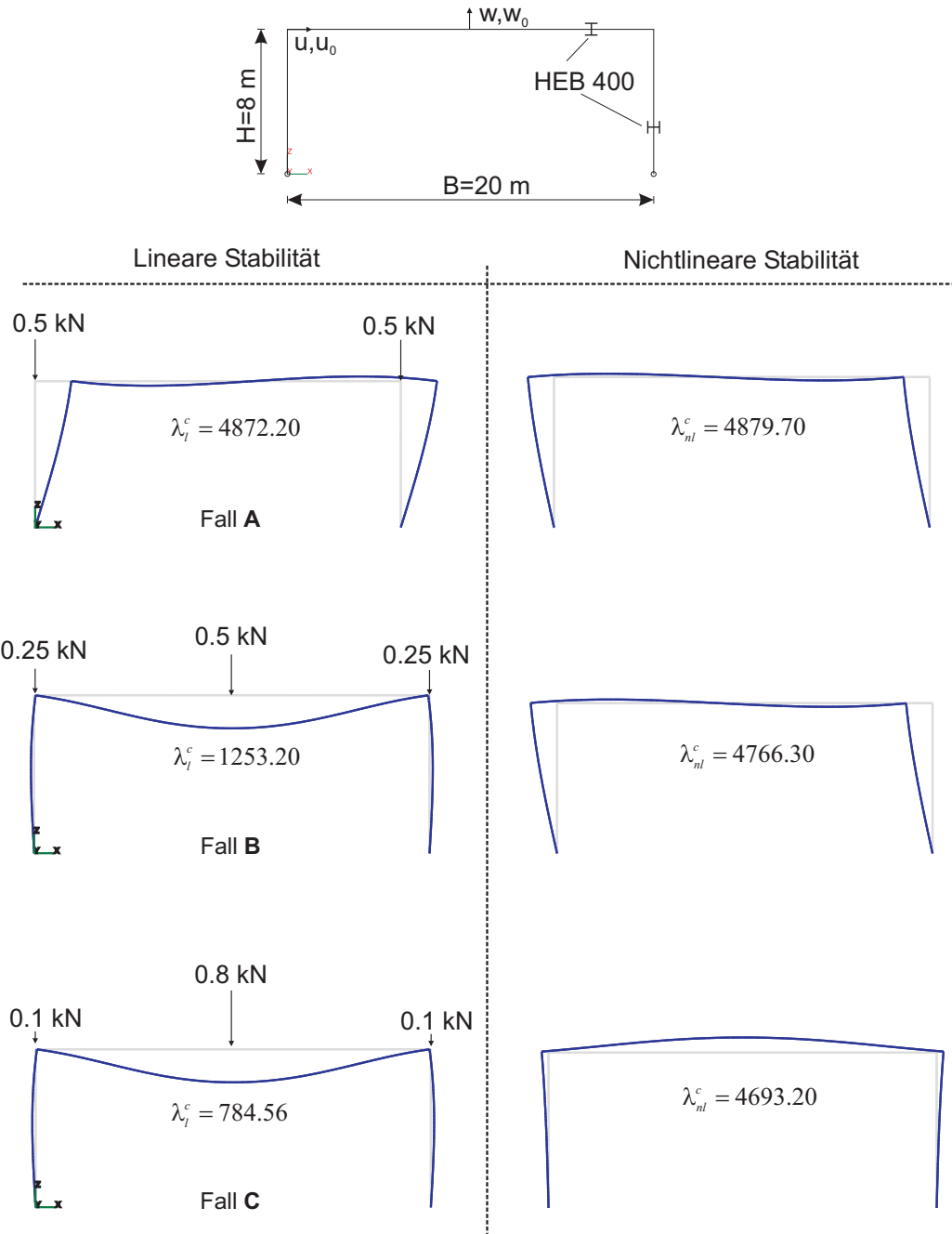


Abbildung 2.2: Rahmen mit verschiedenen Belastungsvarianten, kritische Lastfaktoren λ_l^c und λ_{nl}^c , Eigenformen Φ_l^c und Φ_{nl}^c aus linearen bzw. nichtlinearen Stabilitätsanalysen

Für die numerische Analyse mit dem FE - Programm Stang wurde ein Modell mit Balkenelementen vom Typ III erzeugt. Im ersten Schritt wurden die kritischen Lastniveaus ermittelt. Dies geschah sowohl anhand linearer als auch nichtlinearer Stabilitätsanalysen. Die berechneten kritischen Lastfaktoren λ_l^c bzw. λ_{nl}^c für eine Ausgangsbelastung von jeweils 1 kN Gesamtvertikallast sowie die zugehörigen Knickfiguren Φ_l^c bzw. Φ_{nl}^c können Abb. 2.2 entnommen werden. Im Einzelnen ergibt sich folgendes Bild:

Fall A: Sowohl die kritische Lasthöhe als auch die Knickfigur entsprechen den Erwartungen (analytisch mit Rahmenformeln: $N_{ki} \approx 4731.30\text{ kN}$). Die Ergebnisse der linearen und nichtlinearen Stabilitätsanalyse weisen nur geringfügige Unterschiede auf.

Fall B: Hier ist ein starker Abfall der kritischen Last λ_l^c gegenüber Fall **A** und ein Wechsel zu einer symmetrischen Knickfigur Φ_l^c zu verzeichnen. Die erreichte Lasthöhe λ_{nl}^c liegt dagegen etwas unterhalb λ_{nl}^c des biegungsfreien Lastfalles, Φ_{nl}^c ist ebenfalls antimetrisch.

Fall C: Bezüglich der erreichten Lasthöhen bestätigt sich die Tendenz aus Fall **B** - λ_l^c beträgt hier nur noch etwa $1/6$ des biegungsfreien Lastfalles. Für Φ_{nl}^c ist jedoch ein Umschlag in eine symmetrische Knickfigur zu beobachten.

Eine lineare Stabilitätsanalyse mit den Lastfällen **B** bzw. **C** würde demnach dazu führen, dass die kritischen Lastniveaus stark unterschätzt und damit als Eingangswerte für traditionelle Stabilitätsnachweise untauglich sind. Außerdem würde es zum Teil auch zu Fehleinschätzungen hinsichtlich der maßgeblichen Knickform kommen, was Auswirkungen auf evtl. Imperfektionsuntersuchungen hätte (1. Eigenform = maßgebende Imperfektionsform?). Vergleichsrechnungen mit dem FE - Programm **ANSYS** [1] bestätigten die Ergebnisse für Fall **A**, für die Fälle **B** und **C** ergaben sich $\lambda_l^c = 4603.00$ bzw. $\lambda_l^c = 4555.00$. In allen Fällen wurden asymmetrische Knickfiguren ermittelt.

Diese Unterschiede zeigen eindrucksvoll die Problematik linearer Stabilitätsanalysen und der darin getroffenen Annahmen zu den Steifigkeitsänderungen bis zum approximierten kritischen Punkt. An dieser Stelle sei lediglich erwähnt, dass insbesondere bei Biegeproblemen wie in den Fällen **B** bzw. **C** so genannte Anfangsspannungs- und Anfangsverschiebungseffekte einen maßgeblichen Einfluß besitzen. Aus praktischer Sicht ist demnach von großer Bedeutung, welche Form einer linearen Stabilitätsanalyse verwendet wird.

Weitergehende Überlegungen dazu finden sich in Abschn. 4.2. Dort werden auch weitere praktische Fragestellungen, insbesondere das Verhalten der vorliegenden Rahmensysteme gegenüber geometrischen Imperfektionen, behandelt.

2.2 Zur geschichtlichen Entwicklung der Stabilitätstheorie

Mit der umfassenden Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Stabilitätstheorie befaßt sich eine Vielzahl von Veröffentlichungen. An dieser Stelle kann nur auf einige herausragende Stationen dieser Entwicklung eingegangen werden. Als Grundlage dient [61], wo ein ausführlicher geschichtlicher Abriss zu finden ist.

Die Anfänge der klassischen Stabilitätstheorie gehen auf *Euler* (1774) zurück, der unter anderem das Ausknicken von druckbeanspruchten Stäben untersuchte. Die Bezeichnung „klassisch“ bedeutet in diesem Zusammenhang eine analytische Vorgehensweise und die Konzentration auf die Bestimmung von Verzweigungslasten. Die Weiterentwicklung der Stabilitätstheorie seit *Euler* verlief sehr vielschichtig und in verschiedene Richtungen. Ein wesentlicher Impuls zur weiteren Erforschung von Stabilitätserscheinungen ergab sich daraus, dass sich die klassischen analytischen Stabilitätstheorien für Zylinder- und Kugelschalen, die zu Beginn des 20. Jahrhunderts entwickelt wurden, als unzureichend für die Voraussage von realen Versagenslasten erwiesen. Die Stabilitätstheorie wurde um Untersuchungen des Nachbeulbereiches und der Imperfektionsanfälligkeit erweitert. Als Meilenstein auf diesem Gebiet ist die Entwicklung einer Anfangsnachbeultheorie durch *Koiter* [28] zu nennen, auf die im Verlauf dieser Arbeit noch näher eingegangen wird. Die Koitersche Nachbeulanalyse wurde später weiterentwickelt, z.B. [7, 58]. Gemeinsames Merkmal dieser Methoden ist, dass sie auf energetischen Konzepten beruhen und für die Untersuchung kontinuierlicher Strukturen entwickelt wurden.

Die Computertechnologie ermöglichte ab den siebziger Jahren des 20. Jh. eine alternative, numerische Behandlung von Stabilitätsproblemen auf Basis der Methode der Finiten Elemente. Hierzu wurden - und werden teilweise auch heute noch - leistungsfähige Finite Elemente und eine Vielzahl von numerischen Verfahren und Algorithmen entwickelt. Zu nennen sind hier insbesondere Verfahren zur Pfadverfolgung bei nichtlinearen Problemen und Pfadwechselprozeduren [11, 50]. Die numerischen Verfahren wurden vielfach modifiziert und erweitert, z.B. durch die direkte Berechnung von Stabilitätspunkten mit erweiterten Systemen, Bisektionstechniken zur genauen Bestimmung kritischer Zustände oder Algorithmen zur effektiven Gleichungslösung. Daneben erfolgte eine Übertragung der Koiterschen Nachbeulanalyse in das Finite - Elemente - Konzept der diskreten Strukturen, so dass sie als zusätzliche Analyse-methode für numerische Stabilitätsuntersuchungen zur Verfügung steht.

Gegenwärtige Entwicklungen auf theoretischem Gebiet konzentrieren sich im Wesentlichen auf die Verfeinerung und Weiterentwicklung numerischer Techniken für spezielle Fälle wie beispielsweise für das Problem von Mehrfachver-

zweigungen. Da bei Mehrfachverzweigungen eine Vielzahl von Last - Verformungspfaden auftreten können, stellt die zutreffende Wichtung der an den Beulverformungen beteiligten Singulärvektoren ein sehr komplexes Problem dar, mit dem sich z.B. in [30, 44] beschäftigt wird.

Daneben existieren einige Ansätze zur Erweiterung der numerischen Stabilitätsanalyse, beispielsweise durch Berücksichtigung von Optimierungskriterien [49] oder stochastischen Einflüssen [55]. In [49] wird versucht, die Imperfektionsempfindlichkeit direkt in den Optimierungsvorgang einzubeziehen. Dabei wird davon ausgegangen, dass ein auf die maximale Beullast hin optimiertes Tragwerk eine größere Imperfektionssensitivität aufweisen und damit praktisch unsicherer sein kann als ein nicht so optimales Tragwerk. Die Arbeit von [55] hat zum Ziel, ein allgemein gültiges Verfahren zu entwickeln, mit dem gefährliche Imperfektionsmuster herausgefiltert werden können. Dafür wird der stochastische Charakter von Imperfektionen berücksichtigt. In Kombination mit der Koiterschen Nachbeulanalyse sollen sich dann stochastisch gewichtete Aussagen zu gefährlichen Imperfektionsformen ergeben.

Zu den aufgeführten Tendenzen in der gegenwärtigen Entwicklung ist jedoch kritisch anzumerken, dass die Umsetzung in praktisch verfügbare Anwendungen noch aussteht. Die Gründe dafür sind vor allem in einer eingeschränkten Gültigkeit der vorgeschlagenen Methoden, dem fehlenden Nachweis ihrer Tauglichkeit auch für praktisch relevante Strukturen und in den notwendigen erheblichen Rechenzeiten und -kapazitäten zu sehen.

2.3 Begriffsklärung

Die Beschreibung des Tragverhaltens stabilitätsgefährdeter Strukturen erfordert eine eindeutige und exakte Sprachregelung. Im Folgenden werden deshalb einige wesentliche Begriffe wie **Gleichgewicht**, **Pfade** oder **Verzweigung** eingeführt. Dabei wird von bekannten theoretischen Grundlagen ausgegangen, die hier in einer speziellen Formulierung dargestellt werden.

Besonders geeignet für Stabilitätsuntersuchungen im Zusammenhang mit der Finiten - Elemente - Methode (FEM) sind Energieformulierungen. Angeregt durch [23] wird hier eine diskrete Potentialformulierung verwendet, die auch analytisch ausgewertet werden kann.

Das Energiefunktional für eine elastische Struktur lautet:

$$\Pi(\mathbf{q}, \lambda) = \Psi(\mathbf{q}) + P(\mathbf{q}, \mathbf{F}, \lambda) \quad (2.1)$$

Hierin soll Ψ die innere Verzerrungsenergie als Funktion von generalisierten Koordinaten \mathbf{q} bezeichnen. P stellt das äußere Potential, \mathbf{F} einen konstanten Lastvektor und λ einen skalaren Laststeigerungsfaktor dar. Diese spezielle diskrete Potentialformulierung entspricht der grundlegenden Beziehung in der FEM, wo die generalisierten Koordinaten q_i die Knotenverschiebungen bzw. -rotationen im Vektor der Knotenverformungen \mathbf{q} sind. Im allgemeinen Fall kann der Potentialausdruck Gl.(2.1) nichtlinear sowohl in \mathbf{q} als auch in λ sein.

Der Potentialausdruck, geordnet nach den auftretenden Potenzen von q_i , lautet in Indexschreibweise:

$$\Pi(\mathbf{q}, \lambda) = A_i q_i + \frac{1}{2} A_{ij} q_i q_j + \frac{1}{6} A_{ijk} q_i q_j q_k + \frac{1}{24} A_{ijkl} q_i q_j q_k q_l + \dots \quad (2.2)$$

$$i, j, k, l = 1 \dots n$$

Für i, j, k, l sind die generalisierten Koordinaten einzusetzen. Deren maximale Anzahl n wird in der FEM mit der Anzahl der globalen Freiheitsgrade der diskreten Struktur belegt. Die Koeffizienten A sollen, wie für die FEM typisch, symmetrisch sein, d.h.:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ji} \\ A_{ijk} = A_{ikj} = A_{kji} &= A_{jik} = A_{jki} = A_{kji} \\ &\dots \end{aligned}$$

Außerdem lassen sie sich in einen konstanten und einen von λ abhängigen Teil aufspalten, z.B.:

$$A_{11} = \bar{A}_{11} + \check{A}_{11}(\lambda). \quad (2.3)$$

Für Stabilitätsanalysen müssen in Gl.(2.2) mindestens Größen 4. Ordnung enthalten sein. Somit genügt folgender Ausdruck:

$$\Pi(\mathbf{q}, \lambda) = A_i q_i + \frac{1}{2} A_{ij} q_i q_j + \frac{1}{6} A_{ijk} q_i q_j q_k + \frac{1}{24} A_{ijkl} q_i q_j q_k q_l. \quad (2.4)$$

Eine Struktur befindet sich dann im Gleichgewicht, wenn gilt:

$$\Pi_{,i} = G(q_i, \lambda) = \frac{\partial \Pi(\mathbf{q}, \lambda)}{\partial q_i} = 0. \quad (2.5)$$

Angewendet auf Gl.(2.4) ergibt sich:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} A_1 + A_{1j} q_j + \frac{1}{2} A_{1jk} q_j q_k + \frac{1}{6} A_{1jkl} q_j q_k q_l \\ \vdots \\ A_N + A_{Nj} q_j + \frac{1}{2} A_{Njk} q_j q_k + \frac{1}{6} A_{Njkl} q_j q_k q_l \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Lösungen dieses nichtlinearen Gleichungssystems stellen die **Last - Verformungspfade** bzw. **Gleichgewichtspfade** einer Struktur dar.

Entlang dieser Pfade können Stabilitätsprobleme als **Verzweigungs-** oder **Durchschlagsprobleme** nach Abb. 2.3 bzw. Abb. 2.4 auftreten.

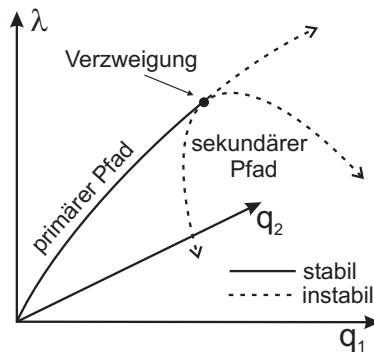


Abbildung 2.3: Gleichgewichtspfade eines 2 Freiheitsgrad - Systems, symmetrisch instabile Verzweigung

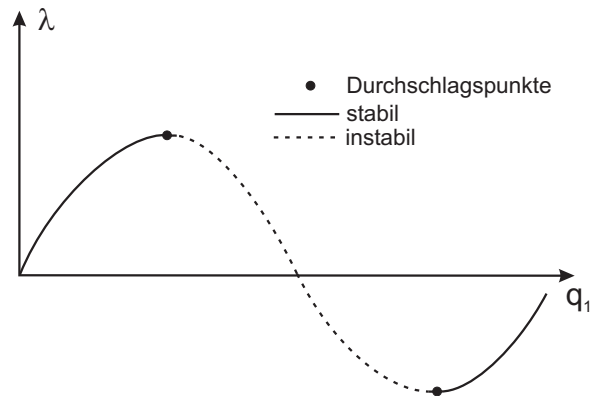


Abbildung 2.4: Gleichgewichtspfad eines 1 Freiheitsgrad - Systems, Durchschlagsproblem

Bei einem Verzweigungsproblem existieren neben dem **primären**(\mathbf{q}^p) ein **sekundärer**(\mathbf{q}^s), bei Mehrfachverzweigungen evtl. auch mehrere sekundäre Pfade. Eine systematische Klassifizierung der einzelnen Stabilitätsprobleme ist möglich und wird später im Rahmen der erweiterten Methoden behandelt.

Gleichgewichtspfade werden im Allgemeinen in Parameterdarstellung angegeben:

$$\mathbf{q}(s) \quad \lambda(s). \quad (2.7)$$

Der Pfadparameter s ist im Prinzip beliebig, jedoch so zu wählen, dass das mechanische Verhalten zutreffend abgebildet werden kann. Dazu werden z.B. die Bogenlänge, ein ausgewählter Freiheitsgrad oder λ verwendet.

Nur in Ausnahmefällen, z.B. bei Systemen, deren Strukturverhalten nur durch wenige Freiheitsgrade (=generalisierte Koordinaten) bestimmt wird, kann Gl.(2.6) aufgelöst werden. In der FEM werden inkrementell - iterative Lösungstechniken, wie die bekannten Newton - Verfahren, verwendet. Diese lassen sich nicht nur innerhalb einer geometrisch nichtlinearen Analyse zur Bestimmung von \mathbf{q}^p , sondern auch, wie später noch gezeigt wird, von \mathbf{q}^s einsetzen.

Bis hierher können noch keine Aussagen zur Instabilität oder Stabilität der Gleichgewichtszustände entlang der Pfade getroffen werden. Insbesondere sind die Gleichgewichtszustände herauszufinden, die kritische Stabilitätszustände darstellen.

2.4 Stabilität von Gleichgewichtszuständen

Die Stabilität bzw. Instabilität eines Gleichgewichtszustandes kann anhand der Energiebilanz bei kleinen Änderungen in den Verformungen festgestellt werden. Dieses Vorgehen korrespondiert mit der ingenieurmäßigen Stabilitätsdefinition, wonach eine stabile Struktur auf die Rücknahme einer Störung des Gleichgewichts von außen mit der Rückkehr zum ursprünglichen Gleichgewichtspunkt, eine instabile Struktur dagegen mit der Einnahme eines neuen Gleichgewichtspunktes mit einem veränderten Verformungszustand reagiert. Stabilität ist mit einem lokalen Energieminimum, Instabilität mit einem lokalen Energiemaximum verbunden. Da die Analyse von Potentialdifferenzen in einer numerischen Stabilitätsanalyse von großer Bedeutung ist, werden hierzu im Folgenden einige grundsätzliche Überlegungen angestellt.

2.4.1 Analyse von Potentialdifferenzen

Im Gleichgewichtszustand „e“ (\mathbf{q}^e, λ^e) wird das Potential Π^e bei kleinen Verformungsänderungen \mathbf{u} bei festem λ untersucht, wobei beliebige Richtungen für \mathbf{u} möglich sind:

$$\Pi(\mathbf{q}^e + \mathbf{u}, \lambda^e) - \Pi^e = \Pi(\mathbf{u}) = \Delta\Pi. \quad (2.8)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi(\mathbf{u}) > 0 &\longrightarrow \text{stabiles Gleichgewicht} \\ \Delta\Pi(\mathbf{u}) < 0 &\longrightarrow \text{instabiles Gleichgewicht.} \end{aligned}$$

$\Delta\Pi$ ist für sämtliche \mathbf{u} zu untersuchen. Was bei einem 2 - Freiheitsgrad - System evtl. noch möglich ist, erfordert innerhalb der FEM besondere Strategien für die Suche nach dem maßgeblichen \mathbf{u} .

Abb. 2.5 zeigt ein einfaches Stabsystem, dessen Verformungsverhalten allein durch die zwei Größen $\mathbf{q}^T = (\alpha \ \beta)$ beschrieben werden kann und dadurch eine anschauliche Darstellung ermöglicht. In Anhang B sind ausführlich der analytische Potentialausdruck, die Pfadfunktionen usw. zu finden.

An drei charakteristischen Gleichgewichtspunkten des Primärpfades wurde \mathbf{q}^e durch $\mathbf{u}^T = (\Delta\alpha \ \Delta\beta)$ verändert. In Abb. 2.6 und 2.7 sind die Auswirkungen auf das Potential dargestellt, wobei die Potentialebene jeweils Π^e am betrachteten Gleichgewichtspunkt kennzeichnet.

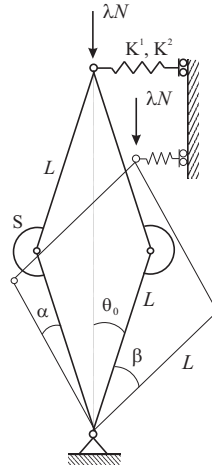


Abbildung 2.5: 2 - DOF - System aus [43]

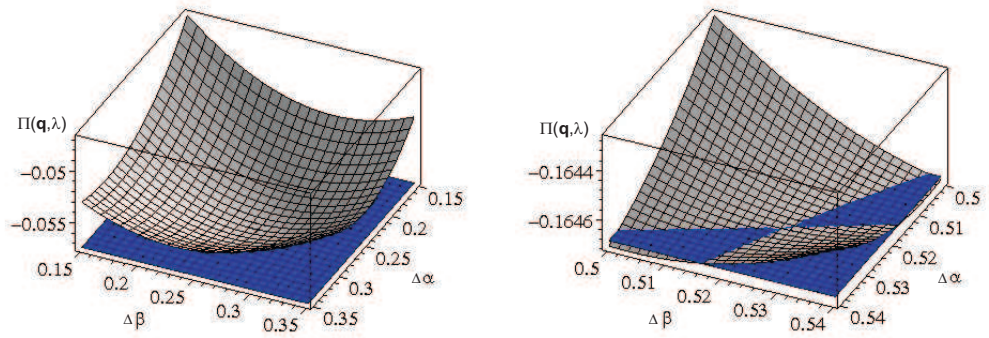


Abbildung 2.6: Potentialauswertung für ausgewählte Gleichgewichtspunkte, $s = 0.262(= \alpha = \beta)$ (links) bzw. $s = 0.524$ (rechts)

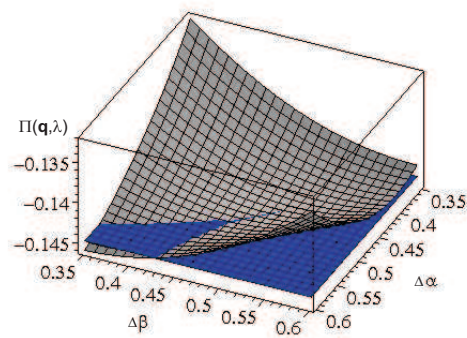


Abbildung 2.7: Potentialauswertung bei $s = 0.484$

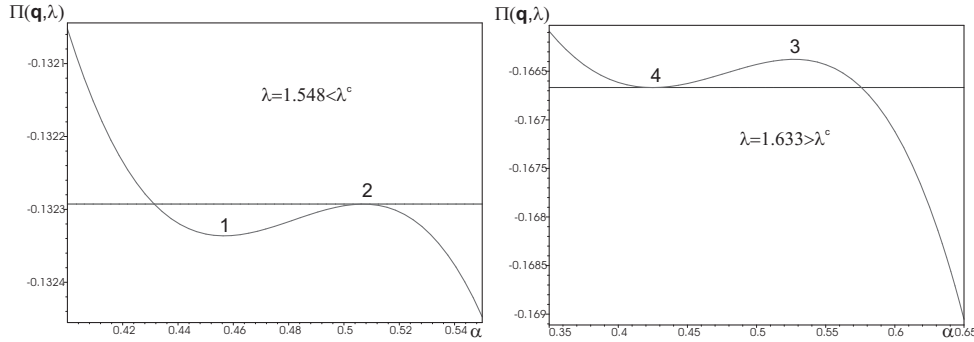


Abbildung 2.8: Potentialverläufe für ausgewählte Lastniveaus, Gleichgewichtspunkte 1: $\mathbf{q}^T = (0.457 \ 0.457)$, 2: $\mathbf{q}^T = (0.507 \ 0.410)$, 3: $\mathbf{q}^T = (0.527 \ 0.527)$, 4: $\mathbf{q}^T = (0.428 \ 0.641)$

Aus den Abb. 2.6 und 2.7 wird deutlich:

1. Bei $s = 0.262$ handelt es sich um einen stabilen Gleichgewichtszustand, da jede beliebige Änderung \mathbf{u} zu einem Anstieg des Potentials in der Umgebung des Gleichgewichtspunktes führt.
2. Bei $s = 0.524$ liegt dagegen instabiles Gleichgewicht vor, da bestimmte Richtungen für \mathbf{u} zu einem Abfall des Potentials führen.
3. Der Gleichgewichtszustand bei $s = 0.484$ ist ebenfalls instabil. Es existiert jedoch nur ein spezielles \mathbf{u} , das einen Potentialabfall erzeugt. Es handelt sich hier um einen **kritischen Punkt**.

In der Ingenieurpraxis würde man bei 3. von einem indifferenten Gleichgewichtszustand sprechen. Dies ergibt sich jedoch nur bei der Verwendung einer linearisierten Theorie. Tatsächlich handelt es sich auch bei einem kritischen Stabilitätspunkt um einen stabilen oder instabilen Gleichgewichtszustand.

Zusätzlich sind in Abb. 2.8 die Potentialverläufe für zwei unterschiedliche Lastniveaus bei festem β und variablem α dargestellt. Aufgrund des vorliegenden Verzweigungsproblems schneiden die aufgezeichneten Verläufe den primären Pfad in den Punkten 1 und 3, den sekundären Pfad in 2 und 4. Die Abb. 2.8 legt nahe, dass es sich bei 1 und 4 um stabile, bei 2 und 3 um instabile Gleichgewichtszustände handelt. Dies trifft tatsächlich zu, einschränkend ist jedoch zu beachten, dass hier nur der Potentialverlauf entlang einer bestimmten Richtung für \mathbf{u} dargestellt wird. Zur Absicherung müssten alle Richtungen für \mathbf{u} untersucht werden.

Die beschriebene direkte Auswertung von $\Delta\Pi$ ist zwar sehr anschaulich, jedoch nur für Systeme mit wenigen Freiheitsgraden realisierbar. Eine systema-

tische, von der Anzahl der q_i unabhängige Stabilitätsanalyse, erfordert eine Modifizierung der Vorgehensweise.

Dazu wird die Potentialdifferenz $\Delta\Pi$ in eine Taylorreihe entwickelt:

$$\Delta\Pi(u_i) = \Pi_{,i}^e u_i + \frac{1}{2}\Pi_{,ij}^e u_i u_j + \frac{1}{6}\Pi_{,ijk}^e u_i u_j u_k + \frac{1}{24}\Pi_{,ijkl}^e u_i u_j u_k u_l. \quad (2.9)$$

Hierin sind $.,_i$ bzw. $.,_q$ usw. die Ableitungen nach den generalisierten Koordinaten bzw. den Knotenfreiheitsgraden der FE - Struktur. In FEM - konformer Schreibweise lautet Gl.(2.9):

$$\Delta\Pi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{G} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} + \frac{1}{6}\mathbf{u}^T (\mathbf{K}_{,q} \mathbf{u}) \mathbf{u} + \frac{1}{24}\mathbf{u}^T (\mathbf{K}_{,qq} \mathbf{u} \mathbf{u}) \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

\mathbf{G} sind die Gleichgewichtsbedingungen nach Gl.(2.6), \mathbf{K} allgemein eine Koeffizientenmatrix, in der FEM die **tangentielle Steifigkeitsmatrix**. Für Gl.(2.10) wird im Weiteren die folgende verkürzte, in [28] eingeführte Schreibweise verwendet:

$$\Delta\Pi(\mathbf{u}) = \Pi_1(\mathbf{u}) + \Pi_2(\mathbf{u}) + \Pi_3(\mathbf{u}) + \Pi_4(\mathbf{u}). \quad (2.11)$$

Dabei werden die von \mathbf{u} linear abhängigen Terme durch Π_1 , die quadratisch abhängigen durch Π_2 usw. zusammengefaßt.

Im betrachteten Gleichgewichtspunkt gilt:

$$\mathbf{G} = \mathbf{0} \rightarrow \Pi_1(\mathbf{u}) = 0. \quad (2.12)$$

Die Stabilität oder Instabilität eines Gleichgewichtszustandes hängt von den Termen $\Pi_2(\mathbf{u})$, $\Pi_3(\mathbf{u})$ usw. ab. Hierfür ist der Potentialausdruck Gl.(2.4) entsprechend nach \mathbf{q} abzuleiten. Für $\Pi_2(\mathbf{u})$ ist die Matrix \mathbf{K} zu ermitteln, die in verschiedene Anteile aufgespalten werden kann. Es ergibt sich schließlich:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{K}_2. \quad (2.13)$$

Hierin ist \mathbf{K}_0 der konstante, \mathbf{K}_1 der linear und \mathbf{K}_2 der quadratisch von \mathbf{q} abhängige Anteil. Diese Aufteilung spiegelt die Steifigkeitsanteile innerhalb der nichtlinearen FEM wider. Im Einzelnen lauten die Anteile formal:

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} A_{11k}q_k & \dots & A_{1Nk}q_k \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1k}q_k & \dots & A_{NNk}q_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} A_{11kl}q_kq_l & \dots & A_{1Nkl}q_kq_l \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1kl}q_kq_l & \dots & A_{NNkl}q_kq_l \end{bmatrix}.$$

Für $\Pi_3(\mathbf{u})$ und $\Pi_4(\mathbf{u})$ in Gl.(2.11) werden die erste bzw. zweite Ableitung von \mathbf{K} nach \mathbf{q} benötigt. Sie ergeben sich aus:

$$(\mathbf{K}_{,q}\mathbf{u}) = \left[\left(\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_1} \right] \mathbf{u} \right) \quad \dots \quad \left(\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_N} \right] \mathbf{u} \right) \right], \quad (2.14)$$

$$(\mathbf{K}_{,qq}\mathbf{u}\mathbf{u}) =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial q_1^2} \right] \mathbf{u} & \mathbf{u}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial q_1 \partial q_2} \right] \mathbf{u} & \dots & \mathbf{u}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial q_1 \partial q_N} \right] \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial q_2 \partial q_1} \right] \mathbf{u} & \mathbf{u}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial q_2^2} \right] \mathbf{u} & \dots & \mathbf{u}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial q_2 \partial q_N} \right] \mathbf{u} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{u}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial q_N \partial q_1} \right] \mathbf{u} & \mathbf{u}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial q_N \partial q_2} \right] \mathbf{u} & \dots & \mathbf{u}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial q_N^2} \right] \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Liegt das Potential als analytischer Ausdruck vor, kann die Differentiation ebenfalls analytisch erfolgen. Innerhalb einer numerischen Stabilitätsanalyse werden die Ableitungen der tangentiellen Steifigkeitsmatrix in der Regel jedoch durch numerische Differentiation erzeugt, worauf unter Abschn. 3.8.5 eingegangen wird.

Bei beliebigem \mathbf{u} bestimmt das Vorzeichen des ersten, von 0 verschiedenen Terms in Gl.(2.11) das Vorzeichen der Potentialdifferenz und entscheidet damit über die Stabilität oder Instabilität des untersuchten Gleichgewichtszustandes.

2.4.2 Reguläre und kritische Gleichgewichtspunkte

Zur weiteren Unterscheidung der Gleichgewichtszustände ist der quadratische Term $\Pi_2(\mathbf{u})$ auszuwerten. Ein **regulärer Gleichgewichtspunkt** zeichnet sich aus durch:

$$\Pi_2(\mathbf{u}) \neq 0. \quad (2.16)$$

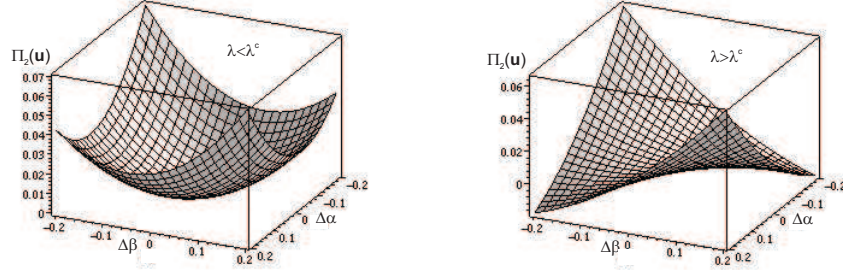


Abbildung 2.9: $\Pi_2(\Delta\alpha, \Delta\beta)$ an ausgewählten Gleichgewichtszuständen, 2 - DOF - Stabsystem aus Abb. 2.5

Die Bedingung für stabiles Gleichgewicht am regulären Punkt lautet:

$$\Pi_2(\mathbf{u}) > 0. \quad (2.17)$$

Andernfalls handelt es sich um einen instabilen regulären Gleichgewichtszustand. Diese Unterscheidung kann anhand $\Pi_2(\mathbf{u})$ getroffen werden, da der quadratische Term der Reihenentwicklung immer die Potentialdifferenz größtmäßig dominiert.

In Abb. 2.9 ist für das Stabsystem aus Abb. 2.5 an zwei ausgewählten Gleichgewichtspunkten auf dem Primärpfad - bei Lastniveaus unter- bzw. oberhalb des kritischen Punktes λ^c - die Änderung $\Pi_2(\mathbf{u})$ für beliebige $\mathbf{u}^T = (\Delta\alpha \quad \Delta\beta)$ dargestellt.

Es wird deutlich, dass es sich in beiden Fällen um reguläre Punkte handelt, da für jede beliebige Variation \mathbf{u} Gl.(2.16) gilt. Während außerdem für den Zustand bei $\lambda < \lambda^c$, unabhängig vom gewählten \mathbf{u} , immer Gl.(2.17) erfüllt ist, existieren im anderen Fall spezielle \mathbf{u} , die auf $\Pi_2(\mathbf{u}) < 0$ führen. Demnach handelt es sich im ersten Fall um einen regulären stabilen, im zweiten Fall um einen regulären instabilen Gleichgewichtszustand.

Im Weiteren ist der Fall zu untersuchen, wenn für spezielle \mathbf{u} gilt:

$$\Pi_2(\mathbf{u}) = 0. \quad (2.18)$$

In diesem Fall handelt es sich um einen **kritischen Gleichgewichtspunkt**. Das Auftreten eines kritischen Punktes ist mit einem Singulärwerden der Koeffizientenmatrix \mathbf{K} verbunden. Ein kritischer Punkt wird als **singulärer Punkt** und der dazugehörige spezielle Verformungsvektor \mathbf{u} als **Singulärvektor** Φ bezeichnet. In der Ingenieurpraxis werden für Φ uneinheitlich die Begriffe Eigenvektor, Eigen-, Knick- oder auch Beulform verwendet.

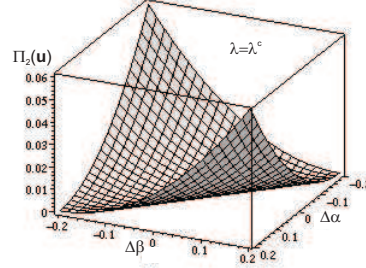


Abbildung 2.10: $\Pi_2(\Delta\alpha, \Delta\beta)$ in λ^c , 2 - DOF - System aus Abb. 2.5

In Abb. 2.10 ist wiederum für das 2 - Freiheitsgrad - Stabsystem der Verlauf von $\Pi_2(\mathbf{u})$ im kritischen Punkt λ^c dargestellt. Es ist zu erkennen, dass für $\Delta\alpha = -\Delta\beta$ Gl.(2.18) erfüllt ist und damit ein kritischer Punkt vorliegt.

Kritische Punkte können als Verzweigungs- oder Durchschlagspunkte auftreten. Während ein Verzweigungspunkt den Schnittpunkt des primären mit dem bzw. den sekundären Pfad(en) markiert, können Durchschlagspunkte sowohl mit lokalen Lastmaxima als auch Lastminima verbunden sein, siehe dazu Abb. 2.4. Durchschlagspunkte können außerdem auch entlang sekundärer Pfade auftreten.

Kritische Stabilitätspunkte werden innerhalb einer numerischen Stabilitätsanalyse „exakt“ durch Kontrolle der Steifigkeitsentwicklung entlang des Primärpfades oder durch linearisierte Approximationen ermittelt. Besonders das letztgenannte Vorgehen besitzt in der Praxis eine herausragende Bedeutung, da so eine schnelle Abschätzung von kritischen Lastniveaus möglich ist. Dazu werden verschiedene **verallgemeinerte Eigenprobleme** formuliert, die alle abgeleitet sind aus der Singularitätsbedingung im kritischen Punkt:

$$\Pi_2(\Phi) = 0 \rightarrow \mathbf{K}\Phi = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

Die konkreten Vorgehensweisen, die unter dem Begriff **lineare** bzw. **linearisierte Stabilitätsanalysen** zusammengefaßt werden, können jedoch sehr unterschiedlich sein. Verschiedene Ansätze dazu werden unter anderem in [4, 23, 46, 58] diskutiert. Sie unterscheiden sich:

- im angenommenen Verlauf des Primärpfades bis zum kritischen Punkt (linear, quadratisch usw.),
- in der Berücksichtigung unterschiedlicher Anteile der nichtlinearen tangentiellen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} (z.B. Anfangsverschiebungseffekte) und

- im gewählten Ausgangspunkt für die Abschätzung, wobei dies in der Regel der unverformte unbelastete Initialzustand „0“ ist.

Insbesondere die Berücksichtigung bzw. Vernachlässigung verschiedener Steifigkeitsanteile kann sich stark auf die approximierte kritische Lasthöhe und den Singulärvektor auswirken. Deshalb ist bei der Beurteilung der Ergebnisse linearer Stabilitätsanalysen unbedingt die Art des verwendeten verallgemeinerten Eigenproblems zu berücksichtigen.

Wird beispielsweise angenommen, dass es sich um einen linearen Primärpfad handelt, führt dies auf ein quadratisches Eigenproblem. Das Eigenproblem wird im Allgemeinen linearisiert, so dass sich folgende, häufig verwendete Formulierung ergibt:

$$[\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_G] \Phi = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

\mathbf{K}_G wäre dann die linear von der Tangente des Primärpfades $\hat{\mathbf{q}}^p$ abhängige so genannte geometrische Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} A_{11k} \hat{q}_k & \dots & A_{1Nk} \hat{q}_k \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1k} \hat{q}_k & \dots & A_{NNk} \hat{q}_k \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Die Lösung des verallgemeinerten Eigenproblems nach Gl.(2.20) liefert eine Näherung für den kritischen Punkt (λ^c, Φ) .

2.4.3 Analyse eines kritischen Punktes ($\Pi_2(\Phi) = 0$)

Zur Klassifizierung eines kritischen Punktes als stabile oder instabile Gleichgewichtszustände sind die Terme $\Pi_3(\mathbf{u})$ und evtl. $\Pi_4(\mathbf{u})$ in Gl.(2.11) auszuwerten. Untersuchungen, die in Kapitel 3 im Zusammenhang mit der numerischen Stabilitätsanalyse dargestellt werden, führen zu einer detaillierten Stabilitätsaussage im kritischen Punkt. An dieser Stelle geht es nur um einige grundsätzliche, auf [28] basierende Vorüberlegungen.

Ein kritischer Punkt ist dann stabil, wenn gilt:

$$\Pi_3(\mathbf{u}) + \Pi_4(\mathbf{u}) > 0. \quad (2.22)$$

Aufgrund der kubischen Abhängigkeit des Terms $\Pi_3(\mathbf{u})$ von \mathbf{u} lautet die notwendige Bedingung für einen stabilen kritischen Punkt:

$$\Pi_3(\mathbf{u}) = 0. \quad (2.23)$$

Als hinreichende Bedingung für einen stabilen kritischen Punkt verbleibt:

$$\Pi_4(\mathbf{u}) > 0. \quad (2.24)$$

Naheliegender ist, hier $\mathbf{u} = \Phi$ einzusetzen. Jedoch stellt $\Pi_4(\Phi) > 0$ zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Stabilität im kritischen Punkt dar. Es ist derjenige Vektor \mathbf{u} zu suchen, der $\Pi_4(\mathbf{u})$ minimiert, wobei allgemein $\mathbf{u} \neq \Phi$ gilt. Für \mathbf{u} wird folgender Ansatz gewählt:

$$\mathbf{u} = \alpha\Phi + \bar{\mathbf{u}} \quad \text{mit } \bar{\mathbf{u}} \perp \Phi. \quad (2.25)$$

Hierin sind α ein Skalierungsfaktor, $\bar{\mathbf{u}}$ eine spezielle Lösung. Dieser Ansatz wird in Gl.(2.11) eingesetzt. Mit der Schreibweise aus [28] (siehe Anhang A) folgt für die Potentialdifferenz ($\Pi_1(\mathbf{u}) = 0$):

$$\begin{aligned} \Delta\Pi(\mathbf{u}) &= \alpha^2\Pi_2(\Phi) + \alpha\Pi_{11}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \Pi_2(\bar{\mathbf{u}}) \\ &+ \alpha^3\Pi_3(\Phi) + \alpha^2\Pi_{21}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha\Pi_{12}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \Pi_3(\bar{\mathbf{u}}) \\ &+ \alpha^4\Pi_4(\Phi) + \alpha^3\Pi_{31}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha^2\Pi_{22}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha\Pi_{13}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \Pi_4(\bar{\mathbf{u}}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Im kritischen Punkt gilt weiterhin:

$$\Pi_2(\Phi) = \Pi_{11}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) = 0. \quad (2.27)$$

Außerdem wird $\Pi_3(\Phi) = 0$ vorausgesetzt, da es sich ansonsten ohne weitere Untersuchung um einen instabilen kritischen Punkt handeln würde.

Aus Gl.(2.26) könnte nun durch Differentiation nach $\bar{\mathbf{u}}$ der maßgebende Vektor $\bar{\mathbf{u}}(\alpha)$ ermittelt werden. Da dies aufgrund der auftretenden Nichtlinearitäten im Allgemeinen schwierig ist, wird in einem weiteren Schritt \mathbf{u} als parametrische Funktion $\mathbf{u}(\alpha)$ betrachtet. Anstelle von Gl.(2.25) wird die folgende Näherung verwendet:

$$\mathbf{u}(\alpha) = \alpha\Phi + \bar{\mathbf{u}} = \alpha\Phi + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}\alpha^2 + \frac{1}{6}\ddot{\mathbf{u}}\alpha^3 + \dots \quad \text{mit } \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}} \perp \Phi. \quad (2.28)$$

Hierin sind $\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ usw. Ableitungen nach α . Die Näherung wird wieder in Gl.(2.11) eingesetzt. Dies führt auf eine Abhängigkeit der Potentialdifferenz von α , die somit lautet:

$$\Delta\Pi(\alpha) = \Delta\dot{\Pi}\alpha + \frac{1}{2}\Delta\ddot{\Pi}\alpha^2 + \frac{1}{6}\Delta\dddot{\Pi}\alpha^3 + \frac{1}{24}\Delta\ddddot{\Pi}\alpha^4 + \dots \quad (2.29)$$

Stabilität am kritischen Punkt liegt dann vor, wenn bei beliebigem α gilt:

$$\Delta\overset{\circ}{\Pi} = \Delta\overset{\circ}{\Pi} = \Delta\overset{\circ}{\Pi} = 0. \quad (2.30)$$

Entscheidend ist das Vorzeichen des Terms $\Delta\overset{\circ}{\Pi}$. Anteile für diesen Koeffizienten liefern - bei Vernachlässigung von Anteilen kleiner Größenordnung - lediglich:

$$\begin{aligned} \Pi_2(\bar{\mathbf{u}}) &= \alpha^4 \frac{1}{8} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}} + \dots \\ \alpha^2 \Pi_{21}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) &= \alpha^4 \frac{1}{4} \Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \dot{\mathbf{u}} + \dots \\ \alpha^4 \Pi_4(\Phi) &= \alpha^4 \frac{1}{24} \Phi^T (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi) \Phi. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Somit ergibt sich schließlich:

$$\Delta\overset{\circ}{\Pi}(\dot{\mathbf{u}}) = 3\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}} + 6\Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \dot{\mathbf{u}} + \Phi^T (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi) \Phi. \quad (2.32)$$

Kann gezeigt werden, dass kein $\dot{\mathbf{u}}$ existiert, für das $\Delta\overset{\circ}{\Pi} < 0$ gilt, wäre die Stabilität im kritischen Punkt hinreichend nachgewiesen.

Dazu wird als Grenzwert ein $\Delta\overset{\circ}{\Pi}(\dot{\mathbf{u}})$ minimierendes $\dot{\mathbf{u}}$ ermittelt durch:

$$\frac{\partial \Delta\overset{\circ}{\Pi}(\dot{\mathbf{u}})}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{0} = \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \Phi \implies \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}} = -(\mathbf{K}_{,q} \Phi) \Phi. \quad (2.33)$$

Gl.(2.33) wird in Gl.(2.32) eingesetzt. Schließlich lautet dann die hinreichende Bedingung für Stabilität im kritischen Punkt:

$$\Delta\overset{\circ}{\Pi} = 3\Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \dot{\mathbf{u}} + \Phi^T (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi) \Phi > 0. \quad (2.34)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, wäre damit Gl.(2.29) für beliebige α positiv. Während dies charakteristisch für symmetrisch stabile Verzweigungen ist, bedeutet der entgegengesetzte Fall eine symmetrisch instabile Verzweigung. Auf die verschiedenen Verzweigungsprobleme wird unter Abschn. 3.6 noch ausführlicher eingegangen.

Vergleicht man Gl.(2.34) mit Gl.(2.10) wird die praktische Bedeutung der vorstehenden Überlegungen deutlich. Die Bedingung $\Pi_4(\Phi) > 0$ stellt zwar

eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung für die Stabilität eines kritischen Punktes dar. Für den maßgeblichen Richtungsvektor \boldsymbol{u} muß $\dot{\boldsymbol{u}}$ berücksichtigt werden. Ansonsten besteht die Gefahr, ein instabiles Verzweigungsproblem fälschlicherweise als stabil einzustufen, was im Endeffekt zu einer falschen Sicherheitsbewertung gegenüber Stabilitätsversagen führen würde.

Kapitel 3

Methoden und Techniken für erweiterte Stabilitätsanalysen

3.1 Einleitung

Zur Beantwortung praktischer Fragestellungen, wie beispielsweise nach der konkreten Größe eines Tragfähigkeitsabfalls entlang eines sekundären Pfades oder nach der Höhe eines Nachbeulminimums bei einem Schalentragswerk, reichen die in der Ingenieurpraxis im Allgemeinen üblichen numerischen Analysemethoden wie auch die Untersuchungen des Abschn. 2.4.3 nicht aus. Numerische Stabilitätsanalysen, die zusätzliche Methoden und Techniken verwenden, werden im Folgenden als erweiterte Stabilitätsanalysen bezeichnet.

Im Mittelpunkt steht die Nachbeulanalyse, die sich mit dem Tragverhalten von Strukturen nach dem Erreichen eines kritischen Punktes beschäftigt. In analytischer Form wurde die Nachbeulanalyse durch *Koiter* begründet [28]. Von den Weiterentwicklungen ist [7] hervorzuheben, wo eine Formulierung der Nachbeulanalyse verwendet wurde, die sich besonders für die numerische Umsetzung eignet. Formulierungen wie z.B. nach [61], im Folgenden als *Verallgemeinerte Nachbeulanalysen* bezeichnet, basieren auf allgemeineren mathematischen Zusammenhängen.

Strukturen, die im perfekten Zustand stabilitätsgefährdet sind, müssen als geometrisch imperfekte Strukturen nicht zwangsläufig ebenfalls Stabilitätsprobleme aufweisen. Das Verhalten einer imperfekten Struktur ist wesentlich vom Stabilitätsverhalten der perfekten Struktur, insbesondere vom Verlauf des Sekundärpfades, abhängig. Auf diesem Zusammenhang beruht die so genannte *Koiterische Imperfektionssensitivität* [28], eine Methode, die sich mit der Approximation des Verhaltens imperfekter Strukturen auf der Basis der Ergebnisse einer Nachbeulanalyse befaßt.

Zu den Methoden für erweiterte numerische Stabilitätsanalysen existiert eine Vielzahl von Veröffentlichungen auf theoretisch sehr anspruchsvollem Niveau, die sich in der Mehrzahl jedoch auf einzelne Aspekte beschränken. Konkrete Hinweise bzw. Berechnungsabläufe für eine numerische Umsetzung sind kaum zu finden. Deshalb wird in diesem Kapitel, neben einer ausführlichen theoretischen Darstellung verschiedener Methoden und Techniken, immer wieder auch auf einzelne Schritte, auf evtl. auftretende Probleme und eigene Erfahrungen bei ihrer Anwendung eingegangen. Beispielimplementierungen zeigen die konkrete Umsetzung innerhalb des FE - Programms Slang [6].

3.2 Pfadverfolgung

Das Stabilitätsverhalten einer Struktur und der Verlauf der Gleichgewichtspfade stehen in einem engen Zusammenhang. Damit besitzt die Ermittlung sämtlicher Gleichgewichtspfade eine zentrale Bedeutung. Für FE - Strukturen scheidet in der Regel eine rein analytische Bestimmung der Gleichgewichtspfade aus. Es sind Pfad- oder Kurvenverfolgungsverfahren erforderlich, die es ermöglichen, den Verlauf eines Gleichgewichtspfades näherungsweise durch die Bestimmung einzelner Gleichgewichtspunkte abzubilden.

Es existiert eine Vielzahl von Kurvenverfolgungsverfahren, deren umfassende Darstellung im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich ist. Eine Übersicht hierüber gibt beispielsweise [61]. Da für die Gleichgewichtspfade stabilitätsgefährdeter Strukturen kein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Belastung und dem Verformungszustand besteht, eignen sich für die numerische Stabilitätsanalyse insbesondere Bogenlängenverfahren.

Pfadverfolgungsalgorithmen bestehen immer aus einem Prädiktorschritt, ausgehend von einem bereits bekannten Gleichgewichtspunkt „e“, und anschließender Korrektoriteration auf einen neuen Gleichgewichtszustand. Bogenlängenverfahren zeichnen sich gegenüber anderen Pfadverfolgungsverfahren wie z.B. Laststeuerung dadurch aus, dass während der Korrektoriteration eine gleichzeitige Anpassung des Last- und Verformungszustandes vorgenommen wird.

Auch für die Bogenlängenverfahren ist eine Vielzahl von Vorgehensweisen bekannt, z.B. [10, 47, 50]. Sie unterscheiden sich in der Art der Korrektoriteration, die eine möglichst schnelle und sichere Konvergenz der Lösung gewährleisten soll.

Für Gleichgewichtspunkte gilt allgemein:

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q}, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) \\ f(\mathbf{q}, \lambda) \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

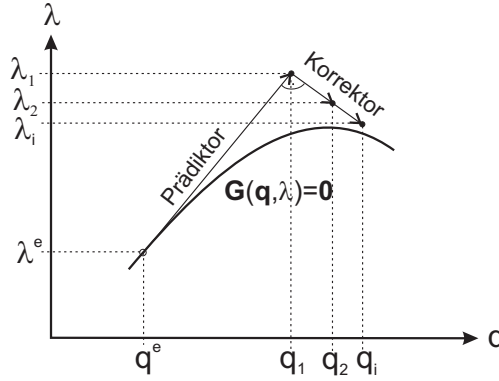


Abbildung 3.1: Iteration auf einer Normalenebene, aus: [61]

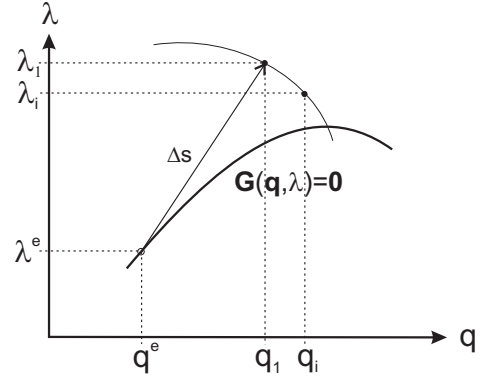


Abbildung 3.2: Iteration auf einer Kugelfläche, aus: [61]

$f(\mathbf{q}, \lambda)$ ist eine Nebenbedingung, die die Form der Korrekturiteration vorgibt. In den Abb. 3.1 und 3.2 ist das Vorgehen für zwei ausgewählte Bogenlängenverfahren dargestellt. Die zugehörige Nebenbedingung lautet für den Fall der Korrekturiteration auf einer Normalenebene:

$$f(\mathbf{q}, \lambda) = (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}^e)^T(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) + (\lambda_1 - \lambda^e)(\lambda - \lambda_1) = 0. \quad (3.2)$$

Dabei sind \mathbf{q}_1 bzw. λ_1 die nicht ausiterierten Verformungs- bzw. Lastinkremente infolge eines linearen Prädiktorschrittes.

Die Korrekturiteration auf einer Kugelfläche nach Abb. 3.2 erfolgt nach folgender Nebenbedingung:

$$f(\mathbf{q}, \lambda) = \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{q}^e)^T(\mathbf{q} - \mathbf{q}^e) + (\lambda - \lambda^e)^2} - \Delta s = 0. \quad (3.3)$$

Hierin ist der Radius der Kugelfläche Δs (die Länge des Prädiktorschrittes) vorzugeben.

Für die Beispielrechnungen in dieser Arbeit wurde ein sphärisches Bogenlängenverfahren verwendet. Die darin verwendete Nebenbedingung lautet:

$$f(\mathbf{q}, \lambda) = \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{q}^e)^T(\mathbf{q} - \mathbf{q}^e) + \Psi^2(\lambda - \lambda^e)^2} - \Delta s = 0. \quad (3.4)$$

Bei Ψ handelt es sich um einen Skalierungsfaktor für das Lastinkrement, der nötig ist, da es sich bei \mathbf{q} und λ um völlig verschiedene Dimensionen handelt. Er wurde entsprechend [2] folgendermaßen festgelegt:

$$\Psi = \frac{\|\mathbf{q}_1\|}{2\lambda_1}. \quad (3.5)$$

Durch die gleichzeitige Linearisierung der Gleichgewichtsbedingungen $\mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda)$ und der Nebenbedingung $f(\mathbf{q}, \lambda)$ lässt sich ein inkrementell - iterativer Lösungsalgorithmus aufbauen. Bogenlängenverfahren sind innerhalb der gebräuchlichen FE - Programme verfügbar, so dass hier auf weitere Einzelheiten verzichtet werden kann. Nähere Hinweise zur Umsetzung eines Bogenlängenverfahrens in einen rechentechnischen Algorithmus sind beispielweise in [2] oder in [61] zu finden. Als Beispiel für einen Bogenlängenalgorithmus ist in Anhang C der innerhalb dieser Arbeit verwendete Berechnungsablauf dokumentiert.

Begleitend zur Pfadverfolgung sind in einer numerischen Stabilitätsanalyse Untersuchungen zur Stabilität/Instabilität der ermittelten Gleichgewichtszustände vorzunehmen. So lassen sich kritische Stabilitätszustände, siehe Abschn. 3.3, ermitteln oder es kann überprüft werden, ob eine Pfadverfolgung tatsächlich, wie gewünscht, entlang eines sekundären Pfades verläuft. Ebenso lassen sich dadurch ungewollte Effekte, wie z.B. eine häufig zu beobachtende Rückkehr zum primären Last - Verformungspfad, aufdecken. Für eine begleitende Stabilitätsanalyse existieren verschiedene Kontrollmöglichkeiten, auf die im Folgenden noch näher eingegangen wird.

3.3 Ermittlung kritischer Stabilitätspunkte

Der erste Schritt einer erweiterten Stabilitätsanalyse besteht im Auffinden kritischer Stabilitätspunkte entlang des primären Last - Verformungspfades. Im weiteren soll angenommen werden, dass es sich dabei um einen einfachen kritischen Punkt handelt. Dies bedeutet, dass in diesem Gleichgewichtspunkt eine einfache Singularität der Koeffizientenmatrix bzw. tangentiellen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} vorliegt und entsprechend Gl.(2.19) ein spezieller Vektor Φ existiert, für den gilt:

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

Aus der Singularität im kritischen Punkt folgt das bekannte Determinantenkriterium:

$$\det \mathbf{K} = 0. \quad (3.7)$$

Kann das Strukturverhalten analytisch beschrieben werden, führt Gl.(3.7) auf ein charakteristisches Polynom. Seine Lösungen ergeben dann die kritischen Punkte entlang des primären Pfades.

Innerhalb der numerischen Stabilitätsanalyse kann $(\det \mathbf{K})$ begleitend zur Pfadverfolgung ausgewertet werden. Dafür wird die, während der inkrementell - iterativen Pfadverfolgung übliche, Dreieckszerlegung von \mathbf{K} genutzt:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T. \quad (3.8)$$

Somit ergibt sich ohne zusätzlichen Aufwand:

$$\det \mathbf{K} = \prod_{i=1}^n D_{ii}. \quad (3.9)$$

Neben dem Determinantenkriterium wird als Indikator für die Steifigkeitsentwicklung entlang des primären Pfades häufig auch begleitend das folgende Standardeigenproblem gelöst:

$$\mathbf{K}\Phi_i = \omega_i\Phi_i. \quad (3.10)$$

Hier ist ω_i und Φ_i der i-te Eigenwert und der dazugehörige Eigenvektor. Die Ermittlung der Eigenpaare erfolgt innerhalb der numerischen Rechnung iterativ, wofür verschiedene Verfahren entwickelt wurden. Ein kritischer Punkt liegt dann vor, wenn am Gleichgewichtspunkt gilt:

$$\omega_1 = 0. \quad (3.11)$$

Bei diesem, in der Ingenieurpraxis als **nichtlineare Stabilitätsanalyse** bezeichneten Vorgehen, sind folgende Sachverhalte zu beachten:

- Innerhalb einer numerischen Analyse können sowohl Gl.(3.7) als auch Gl.(3.11) nur näherungsweise erfüllt werden, das heißt es liegt ein kritischer Punkt vor, wenn:

$$\det \mathbf{K} \approx 0 \quad \text{bzw.} \quad \omega_1 \approx 0.$$

- Problematisch ist an Gl.(3.9), dass hier im Allgemeinen ein Wert entsteht, der vom Rechner nicht mehr dargestellt werden kann. Deshalb wird in [62] vorgeschlagen, folgende Skalierung vorzunehmen:

$$\det \bar{\mathbf{K}} = \frac{\det^k \mathbf{K}_s}{\det^0 \mathbf{K}_s} \quad \text{mit} \quad \det^k \mathbf{K}_s = \prod_{i=1}^n \frac{{}^k D_{ii}}{\|{}^0 \mathbf{D}\|}. \quad (3.12)$$

Hierin bezeichnet k den aktuell berechneten Gleichgewichtszustand und 0 den linearen Prädiktorschritt innerhalb der Gleichgewichtsiteation.

- In der numerischen Analyse ist nur die Veränderung der erwähnten Steifigkeitsindikatoren, nicht deren absolute Größe, von Interesse. Es muß also nur beobachtet werden, wann der erste Nulldurchgang der entsprechenden Größe erfolgt. Unterschiede in der Verlaufscharakteristik ergeben sich in Abhängigkeit vom vorliegenden Stabilitätsproblem. Bei Durchschlagsproblemen ist ein kontinuierlicher, bei Annäherung an λ^c sich verstärkender Abfall zu beobachten. Bei Verzweigungsproblemen erfolgt dagegen in der Regel ein abrupter Steifigkeitsverlust und damit ein sehr steiler Abfall am Verzweigungspunkt.
- Bei Annäherung an einen kritischen Punkt stellt sich eine zunehmende Singularität der Steifigkeitsmatrix ein. Dies führt dazu, dass die Lösung von Gl.(3.10) nicht immer zuverlässig ist. In einigen Fällen konnte ein Vertauschen von Eigenwerten bei Annäherung an den kritischen Punkt beobachtet werden, so dass ω_1 auch nach Erreichen des kritischen Punktes weiterhin positiv blieb, ω_2 jedoch negativ war. Dieses Problem trat besonders bei nahe beieinander liegenden kritischen Lastniveaus auf. Somit erscheint es notwendig, bei einer begleitenden Stabilitätsuntersuchung nicht nur den anfänglich kleinsten Eigenwert zu beobachten.
- Für weitergehende Stabilitätsuntersuchungen im kritischen Punkt ist es notwendig, diesen möglichst genau zu ermitteln. Dem stehen jedoch die vorgenannten Probleme entgegen. Extrapolationen des kritischen Punktes aus größerer Entfernung oder der „vorsichtige“ Einsatz von Bisektionsverfahren können hier zweckmäßig sein. In jedem Fall sind während der Pfadverfolgung, insbesondere bei Annäherung an einen vermuteten kritischen Punkt, die inkrementellen Tangentiallösungen für die Verformungen zu kontrollieren. Eine auftretende Singularität zeigt sich sehr deutlich an einer sprunghaften Zunahme der inkrementellen Verformungen, was beispielsweise über die begleitende Berechnung der Norm des entsprechenden Vektors festgestellt werden kann.

In vielen praktischen Fällen kann der kritische Punkt auf dem primären Pfad mit ausreichender Genauigkeit näherungsweise durch verallgemeinerte Eigenprobleme, so genannte **lineare** oder **linearisierte Stabilitätsanalysen**, ermittelt werden. Die Grundlage für die verallgemeinerten Eigenprobleme bildet die Aufspaltung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma. \quad (3.13)$$

Hierin sind \mathbf{K}_l die lineare elastische Steifigkeits-, \mathbf{K}_u die Anfangsverschiebungs- und \mathbf{K}_σ die Anfangsspannungsmatrix. Ausgehend von Gl.(3.13) las-

sen sich verschiedenste verallgemeinerte Eigenprobleme für den Lastparameter λ formulieren, die z.B. in [46] ausführlich dargestellt sind.

In vielen kommerziellen FE - Programmen, wie beispielsweise [1], wird das folgende, als klassisch bezeichnete, verallgemeinerte Eigenproblem verwendet:

$$(\mathbf{K}_l - \lambda \mathbf{K}_\sigma^L) \Phi = \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

Hierin kennzeichnet \mathbf{K}_σ^L den linearen Anteil der Anfangsspannungsmatrix \mathbf{K}_σ . \mathbf{K}_σ^L wird dabei aus dem vorliegenden Spannungszustand infolge eines ersten Lastschrittes (in der Regel für $\lambda = 1.0$) ermittelt. Im Ergebnis von Gl.(3.14) ergibt sich dann λ als Vergrößerungsfaktor des ersten Lastschrittes bis zum kritischen Punkt.

Die Mitnahme bzw. Vernachlässigung verschiedener Anteile aus Gl.(3.13) in einer linearisierten Stabilitätsanalyse kann erhebliche Auswirkungen auf die berechnete kritische Lasthöhe und/oder den zugehörigen Singulärvektor besitzen. Insbesondere bei Stabilitätsproblemen, die anfängliche Biegeverformungen aufweisen, sind solche Einflüsse zu beachten. In Abschn. 4.2 wird dies anhand des Rahmensystems aus Abb. 2.2 diskutiert.

3.4 Koitersche Nachbeulanalyse

Für die Nachbeulanalyse nach *Koiter* [28] gelten folgende Voraussetzungen und Annahmen:

1. Beim ermittelten kritischen Punkt auf dem primären Last - Verformungspfad handelt es sich um einen einfachen Verzweigungspunkt:

$$\lambda = \lambda^c, \quad \mathbf{q}^c = \mathbf{q}^p(\lambda = \lambda^c), \quad \text{mit } \omega_1 = 0, \quad \text{und } \omega_i > 0 \quad i > 1.$$

2. Der Primärpfad $\mathbf{q}^p(\lambda)$ ist vollständig, auch oberhalb von λ^c , bekannt. Bei analytischen Problemstellungen ist dies im Allgemeinen unproblematisch. Bei numerischen Stabilitätsanalysen wird allerdings die Pfadverfolgung in der Regel bei Erreichen des Verzweigungspunktes abgebrochen. Für eine Weiterverfolgung des Pfades müßte mit einer indefiniten Steifigkeitsmatrix weitergerechnet werden, was zusätzliche Maßnahmen wie Stabilisierungstechniken erforderlich macht.
3. In der Umgebung des Verzweigungspunktes „c“ sollen Gleichgewichtszustände existieren, die nicht auf dem primären Pfad liegen. Sie unterscheiden sich vom Primärpfad durch kleine Verformungsdifferenzen \mathbf{u} bei gleichem Lastniveau λ .

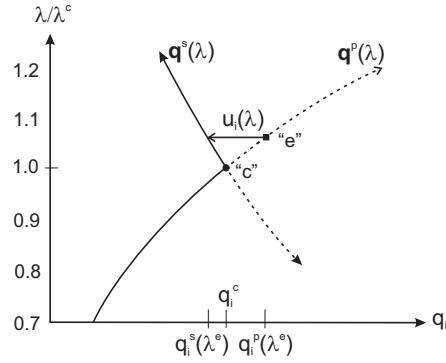


Abbildung 3.3: Koitersche Nachbeulanalyse - Grundidee

Ziel der *Koiterschen Nachbeulanalyse* ist es, wie in Abb. 3.3 symbolisch dargestellt, den sekundären Pfad in Abhängigkeit von λ zu ermitteln. Dabei beschränkt man sich auf die unmittelbare Umgebung des Verzweigungspunktes. Der gesuchte Verformungszustand wird, ausgehend von einem Gleichgewichtspunkt auf dem primären Pfad ($\mathbf{q}^p(\lambda^e), \lambda^e$), ausgedrückt durch:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^p(\lambda^e) + \mathbf{u}(\lambda). \quad (3.15)$$

Hierin ist \mathbf{u} das von λ abhängige Verformungszinkrement. Da der sekundäre Pfad mit Bezug auf den primären Pfad beschrieben wird, bezeichnet man die *Koitersche Nachbeulanalyse* auch als **indirekte Methode**.

Der Potentialausdruck für die benachbarte Konfiguration wird in zwei Schritten, ausgehend von „e“, durch eine Reihe approximiert. Zuerst wird Π infolge der Änderung des Verformungszustandes beim Übergang vom primären zum sekundären Pfad, dann entlang des sekundären Pfades bei Änderung von λ ausgewertet:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{q}, \lambda) = & \Pi(\mathbf{q}^p(\lambda^e), \lambda^e) + \Pi_{,q} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \Pi_{,qq} \mathbf{u} \mathbf{u} + \dots \\ & + \hat{\Pi}(\lambda - \lambda^e) + \hat{\Pi}_{,q}(\lambda - \lambda^e) \mathbf{u} + \frac{1}{2} \hat{\Pi}_{,qq}(\lambda - \lambda^e) \mathbf{u} \mathbf{u} + \dots \\ & + \frac{1}{2} \hat{\Pi}(\lambda - \lambda^e)^2 + \frac{1}{2} \hat{\Pi}_{,q}(\lambda - \lambda^e)^2 \mathbf{u} + \frac{1}{4} \hat{\Pi}_{,qq}(\lambda - \lambda^e)^2 \mathbf{u} \mathbf{u} + \dots \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Hierin bezeichnen $\hat{\cdot}$, $\hat{\cdot}$ erste und zweite Ableitungen nach λ und $\dots_{,q}, \dots_{,qq}$ Ableitungen nach den generalisierten Koordinaten bzw. Freiheitsgraden der Struktur.

Für das Verformungsinkrement \mathbf{u} wird folgender Ansatz eingeführt:

$$\mathbf{u} = \alpha \Phi + \bar{\mathbf{u}} \quad \text{mit:} \quad \bar{\mathbf{u}} \perp \Phi. \quad (3.17)$$

In diesem Ansatz, der auch schon in Abschn. 2.4.3 verwendet wurde, besitzt der Singulärvektor Φ den wesentlichen Anteil an dem Verformungsunterschied zwischen Primär- und Sekundärpfad bei gleichem λ , $\bar{\mathbf{u}}$ stellt einen Korrekturvektor dar. Gesucht ist der Parameter α in Gl.(3.17) für ein vorgegebenes Lastniveau.

Der Ansatz nach Gl.(3.17) wird in den Potentialausdruck Gl.(3.16) eingesetzt. Dies ergibt, mit der Entwicklung in „e“, der Beschränkung auf die quadratischen Abhängigkeiten von λ sowie der 4. Ableitungen des Potentials nach \mathbf{q} , einen approximierten Potentialausdruck für den benachbarten Punkt. Er lautet mit der Schreibweise aus Anhang A:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{q}^p + \mathbf{u}, \lambda) &= \Pi(\mathbf{q}^p(\lambda^e), \lambda^e) + (\lambda - \lambda^e) \hat{\Pi} + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^e)^2 \hat{\hat{\Pi}} \\ &+ \alpha \Pi_1(\Phi) + \Pi_1(\bar{\mathbf{u}}) \\ &+ (\lambda - \lambda^e) \left[\alpha \hat{\Pi}_1(\Phi) + \hat{\Pi}_1(\bar{\mathbf{u}}) \right] \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^e)^2 \left[\alpha \hat{\hat{\Pi}}_1(\Phi) + \hat{\hat{\Pi}}_1(\bar{\mathbf{u}}) \right] \\ &+ \underline{\alpha^2 \Pi_2(\Phi)} + \underline{\alpha \Pi_{11}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \underline{\Pi_2(\bar{\mathbf{u}})} \\ &+ (\lambda - \lambda^e) \left[\underline{\alpha^2 \hat{\Pi}_2(\Phi)} + \underline{\alpha \hat{\Pi}_{11}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \hat{\Pi}_2(\bar{\mathbf{u}}) \right] \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^e)^2 \left[\underline{\alpha^2 \hat{\hat{\Pi}}_2(\Phi)} + \underline{\alpha \hat{\hat{\Pi}}_{11}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \hat{\hat{\Pi}}_2(\bar{\mathbf{u}}) \right] \\ &+ \underline{\alpha^3 \Pi_3(\Phi)} + \underline{\alpha^2 \Pi_{21}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \alpha \Pi_{12}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \Pi_3(\bar{\mathbf{u}}) \\ &+ (\lambda - \lambda^e) \left[\underline{\alpha^3 \hat{\Pi}_3(\Phi)} + \underline{\alpha^2 \hat{\Pi}_{21}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \alpha \hat{\Pi}_{12}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \hat{\Pi}_3(\bar{\mathbf{u}}) \right] \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^e)^2 \left[\underline{\alpha^3 \hat{\hat{\Pi}}_3(\Phi)} + \underline{\alpha^2 \hat{\hat{\Pi}}_{21}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} \right. \\ &\quad \left. + \underline{\alpha \hat{\hat{\Pi}}_{12}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \hat{\hat{\Pi}}_3(\bar{\mathbf{u}}) \right] \\ &+ \underline{\alpha^4 \Pi_4(\Phi)} + \underline{\alpha^3 \Pi_{31}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \alpha^2 \Pi_{22}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) \\ &+ \alpha \Pi_{13}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \Pi_4(\bar{\mathbf{u}}) \\ &+ (\lambda - \lambda^e) \left[\underline{\alpha^4 \hat{\Pi}_4(\Phi)} + \underline{\alpha^3 \hat{\Pi}_{31}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \alpha^2 \hat{\Pi}_{22}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) \right. \\ &\quad \left. + \underline{\alpha \hat{\Pi}_{13}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \hat{\Pi}_4(\bar{\mathbf{u}}) \right] \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^e)^2 \left[\underline{\alpha^4 \hat{\hat{\Pi}}_4(\Phi)} + \underline{\alpha^3 \hat{\hat{\Pi}}_{31}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \alpha^2 \hat{\hat{\Pi}}_{22}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) \right. \\ &\quad \left. + \underline{\alpha \hat{\hat{\Pi}}_{13}(\Phi, \bar{\mathbf{u}})} + \hat{\hat{\Pi}}_4(\bar{\mathbf{u}}) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Auf die Kennzeichnung „e“ bei den Potentialausdrücken wurde hier und wird auch im Folgenden verzichtet. Alle Ableitungen verstehen sich in „e“.

Der benachbarte Zustand soll sich im Gleichgewicht befinden. Deshalb muß das Potential einen stationären Wert bei kleinen Variationen $\delta \bar{\mathbf{u}}$ einnehmen. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten somit:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) = \frac{\partial \Pi(\mathbf{q}^p + \mathbf{u}, \lambda)}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Gl.(3.19) führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem für $\bar{\mathbf{u}}$. In FEM - konformer Schreibweise, siehe auch Abschn. 2.4.1, läßt sich dies folgermaßen darstellen, wobei jetzt „e“= „c“ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{u}}, \alpha, \lambda) &= \mathbf{G}(\mathbf{q}^p(\lambda^c), \lambda^c) + (\lambda - \lambda^c) \hat{\mathbf{G}} + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^c)^2 \hat{\hat{\mathbf{G}}} \\ &+ \underline{\alpha \mathbf{K} \Phi + \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}} \\ &+ (\lambda - \lambda^c) \left[\underline{\alpha \hat{\mathbf{K}} \Phi + \hat{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{u}}} \right] \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^c)^2 \left[\underline{\alpha \hat{\hat{\mathbf{K}}} \Phi + \hat{\hat{\mathbf{K}}} \bar{\mathbf{u}}} \right] \\ &+ \underline{\frac{1}{2} \alpha^2 (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \Phi + \alpha (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} (\mathbf{K}_{,q} \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}}} \\ &+ (\lambda - \lambda^c) \left[\underline{\frac{1}{2} \alpha^2 (\hat{\mathbf{K}}_{,q} \Phi) \Phi + \alpha (\hat{\mathbf{K}}_{,q} \Phi) \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{K}}_{,q} \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}}} \right] \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^c)^2 \left[\underline{\frac{1}{2} \alpha^2 (\hat{\hat{\mathbf{K}}}_{,q} \Phi) \Phi + \alpha (\hat{\hat{\mathbf{K}}}_{,q} \Phi) \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} (\hat{\hat{\mathbf{K}}}_{,q} \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}}} \right] \\ &+ \underline{\frac{1}{6} \alpha^3 (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi) \Phi + \frac{1}{2} \alpha^2 (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi) \bar{\mathbf{u}}} \\ &+ \frac{1}{2} \alpha (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{6} (\mathbf{K}_{,qq} \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} \\ &+ (\lambda - \lambda^c) \left[\underline{\frac{1}{6} \alpha^3 (\hat{\mathbf{K}}_{,qq} \Phi \Phi) \Phi + \frac{1}{2} \alpha^2 (\hat{\mathbf{K}}_{,qq} \Phi \Phi) \bar{\mathbf{u}}} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \alpha (\hat{\mathbf{K}}_{,qq} \Phi \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{6} (\hat{\mathbf{K}}_{,qq} \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} \right] \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^c)^2 \left[\underline{\frac{1}{6} \alpha^3 (\hat{\hat{\mathbf{K}}}_{,qq} \Phi \Phi) \Phi + \frac{1}{2} \alpha^2 (\hat{\hat{\mathbf{K}}}_{,qq} \Phi \Phi) \bar{\mathbf{u}}} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \alpha (\hat{\hat{\mathbf{K}}}_{,qq} \Phi \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{6} (\hat{\hat{\mathbf{K}}}_{,qq} \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} \right] \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Hierin sind \mathbf{K} , $\mathbf{K}_{,q}$, $\hat{\mathbf{K}}_{,q}$ usw. in der numerischen Stabilitätsanalyse wieder die tangentielle Steifigkeitsmatrix und ihre Ableitungen nach den Verformungen und dem Lastparameter.

Die erste Zeile von Gl.(3.20) stellt die Reihenentwicklung der Gleichgewichtsbedingungen entlang des primären Pfades dar. Da der Primärpfad voraussetzungsgemäß ein Gleichgewichtspfad ist, muß gelten:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}^p(\lambda^c), \lambda^c) + (\lambda - \lambda^c)\hat{\mathbf{G}} + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^c)^2\hat{\hat{\mathbf{G}}} = \mathbf{0}. \quad (3.21)$$

$\hat{\mathbf{G}}$ und $\hat{\hat{\mathbf{G}}}$ sind Ableitungen der Gleichgewichtsbedingungen nach λ . Sie lauten ausführlich:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}}{d\lambda} &= \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} + \frac{d\mathbf{G}}{d\lambda} = \mathbf{G}_{,q}\hat{\mathbf{q}}^p + \hat{\mathbf{G}} = \mathbf{0} \\ \frac{d^2\mathbf{G}}{d\lambda^2} &= \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{q}} \frac{d^2\mathbf{q}}{d^2\lambda} + \frac{d^2\mathbf{G}}{d^2\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} = \mathbf{G}_{,q}\hat{\hat{\mathbf{q}}}^p + \mathbf{G}_{,qq}\hat{\mathbf{q}}^p\hat{\mathbf{q}}^p = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Hier sind $\hat{\mathbf{q}}^p$ die Tangente und $\hat{\hat{\mathbf{q}}}^p$ die Krümmung des Primärpfades im Verzweigungspunkt, Gl.(3.22) stellt nichts anderes als ihre Bestimmungsgleichungen im Verzweigungspunkt dar. Daneben verschwindet der 4. Term in Gl.(3.20) aufgrund der Singularität am Verzweigungspunkt, siehe Gl.(2.19).

Gl.(3.20) wird unter Beachtung der Nebenbedingung Gl.(3.17) nach $\bar{\mathbf{u}}(\alpha)$ aufgelöst. Diese Lösung wird in Gl.(3.18) eingesetzt und anschließend $\alpha(\lambda)$ ermittelt aus:

$$\frac{d\Pi(\lambda, \alpha)}{d\alpha} = 0. \quad (3.23)$$

Somit kann, indem λ vorgegeben wird, schließlich der sekundäre Gleichgewichtspfad in der Umgebung des Verzweigungspunktes approximiert werden durch:

$$\mathbf{q}^s(\lambda) = \mathbf{q}^p(\lambda) + \alpha(\lambda)\Phi + \bar{\mathbf{u}}(\alpha(\lambda)). \quad (3.24)$$

Die Auflösung von Gl.(3.20) ist aufgrund der auftretenden Nichtlinearität in der Regel jedoch kompliziert. Zur Vereinfachung wird eine linearisierte Form der Gleichgewichtsbedingungen verwendet, indem berücksichtigt wird, dass es sich sowohl bei $(\lambda - \lambda^c)$ als auch bei α und $\bar{\mathbf{u}}$ um kleine, inkrementelle Werte handelt. Für die linearisierte Fassung werden ab dem quadratischen Term $P_2(\bar{\mathbf{u}})$ in Gl.(3.18) im Vergleich zu $P_2(\bar{\mathbf{u}})$ kleine Terme gestrichen. Es verbleiben die in Gl.(3.18) unterstrichenen Terme. Gl.(3.19) liefert jetzt ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung des Korrekturvektors $\bar{\mathbf{u}}(\lambda, \alpha)$. In Gl.(3.20) sind die verbleibenden Terme des linearen Gleichungssystems gekennzeichnet. Anschließendes Einsetzen von $\bar{\mathbf{u}}(\lambda, \alpha)$ in die reduzierte Potentialfunktion Gl.(3.18) und Anwendung von Gl.(3.23) erlauben wieder eine Ermittlung von $\alpha(\lambda)$.

Die Nachbeulanalyse in der hier behandelten Form eignet sich besonders für Problemstellungen wie beispielsweise in Abschn. 4.3, wo von einem analytischen Potentialausdruck ausgegangen werden kann. Soll jedoch die *Koiter-sche Nachbeulanalyse* im Rahmen einer numerischen Stabilitätsanalyse angewendet werden, ist eine approximierte Fassung von Vorteil, die im Folgenden dargestellt wird.

3.5 Koitersche Nachbeulanalyse - Approximation

In [7] wurde eine modifizierte Fassung der *Koiter-schen Nachbeulanalyse* entwickelt, die sich für eine numerische Umsetzung innerhalb der FEM anbietet. Danach können anstelle von Gl.(3.19) und Gl.(3.23) sukzessiv lineare Gleichungen und Gleichungssysteme gelöst werden, was sich für einen rechen-technischen Ablauf besonders eignet.

Neben der Potentialdifferenz zum Nachbarzustand werden dazu auch das Verformungsinkrement \mathbf{u} und das Lastinkrement $(\lambda - \lambda^c)$ in Abhängigkeit von einem Parameter ζ durch Polynomansätze approximiert:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \zeta \mathbf{u}_1 + \zeta^2 \mathbf{u}_2 + \zeta^3 \mathbf{u}_3 + \dots \\ \lambda - \lambda^c &= \zeta \lambda_1 + \zeta^2 \lambda_2 + \zeta^3 \lambda_3 + \dots\end{aligned}\quad (3.25)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen werden direkt aus Gl.(3.16) abgeleitet:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) = \frac{\partial \Pi(\mathbf{q}^p + \mathbf{u}, \lambda)}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (3.26)$$

Anschließend werden in \mathbf{G} die Näherungen Gl.(3.25) eingesetzt. Dies ergibt, geordnet nach den Potenzen von ζ :

$$\begin{aligned}& \zeta \quad \mathbf{K} \mathbf{u}_1 \\ & + \quad \zeta^2 \quad \left(\mathbf{K} \mathbf{u}_2 + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} (\mathbf{K}_{,q} \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 \right) \\ & + \quad \zeta^3 \quad \left(\mathbf{K} \mathbf{u}_3 + \hat{\mathbf{K}} (\mathbf{u}_1 \lambda_2 + \mathbf{u}_2 \lambda_1) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_1 \lambda_1^2 + (\mathbf{K}_{,q} \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_2 \right) \\ & + \quad \zeta^3 \quad \left(\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{K}}_{,q} \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 \lambda_1 + \frac{1}{6} (\mathbf{K}_{,qq} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 \right) \\ & + \quad \dots = \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Da, unabhängig vom tatsächlichen Wert für ζ , die Terme bei ζ, ζ^2, ζ^3 usw. einzeln verschwinden müssen, entstehen lineare Gleichungssysteme. Aufgrund der vorliegenden Singularität von \mathbf{K} am Verzweigungspunkt resultiert aus dem Term bei ζ :

$$\mathbf{u}_1 = \Phi. \quad (3.28)$$

Multiplikation des Terms bei ζ^2 mit Φ^T und Einsetzen von Gl.(3.28) ergibt für λ_1 :

$$\lambda_1 = -\frac{\Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \Phi}{2\Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi}. \quad (3.29)$$

Es wird dabei wieder berücksichtigt, dass am kritischen Punkt $\Phi^T \mathbf{K} = \mathbf{0}$ gilt.

Aus dem linearen Gleichungssystem bei ζ^2 kann anschließend \mathbf{u}_2 ermittelt werden:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_2 = -\left(\hat{\mathbf{K}} \Phi \lambda_1 + \frac{1}{2} (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \Phi \right). \quad (3.30)$$

Aus dem mit Φ^T vormultiplizierten Term bei ζ^3 folgt für λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & -\frac{\Phi^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_2 \lambda_1 + \frac{1}{2} \Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi \lambda_1^2 + \Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \mathbf{u}_2}{\Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi} \\ & -\frac{\frac{1}{2} \Phi^T \left(\hat{\mathbf{K}}_{,q} \Phi \right) \Phi \lambda_1 + \frac{1}{6} \Phi^T (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi) \Phi}{\Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Für \mathbf{u}_3 ist das Gleichungssystem bei ζ^3 aufzulösen. Mit demselben Vorgehen für die Terme bei ζ^4 usw. kann die Berechnung von λ_3, \mathbf{u}_4 usw. erfolgen.

Für viele praktische Stabilitätsfälle gilt $\lambda_1 = 0$. Dann vereinfacht sich die Berechnung von λ_2 wesentlich mit:

$$\lambda_2 = -\frac{\Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \mathbf{u}_2 + \frac{1}{6} \Phi^T (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi) \Phi}{\Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi}. \quad (3.32)$$

Das Verformungsinkrement \mathbf{u}_2 berechnet sich für diesen Spezialfall aus:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_2 = -\frac{1}{2} (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \Phi. \quad (3.33)$$

Ganz allgemein lautet die Näherung für den sekundären Last - Verformungspfad im Verzweigungspunkt:

$$\begin{aligned}\lambda^s &= \lambda^c + \lambda_1 \zeta + \lambda_2 \zeta^2 + \lambda_3 \zeta^3 + \dots \\ \mathbf{q}^s &= \mathbf{q}^p(\lambda) + \mathbf{\Phi} \zeta + \mathbf{u}_2 \zeta^2 + \mathbf{u}_3 \zeta^3 + \dots\end{aligned}\quad (3.34)$$

Für die konkrete Auswertung wird das Lastinkrement vorgegeben, z.B.:

$$\lambda - \lambda^c = \zeta \lambda_1 = 1.0 \quad (3.35)$$

Hieraus läßt sich ζ ermitteln. Die Tangentenlösung für den Sekundärpfad lautet dann beispielsweise im Falle eines linearen Primärpfades und bei $\lambda_1 \neq 0$:

$$\hat{\mathbf{q}}^s = \lambda_1 \zeta \hat{\mathbf{q}}^p + \zeta \mathbf{\Phi}. \quad (3.36)$$

3.6 Verallgemeinerte Nachbeulanalyse

Die *Koiter'sche Nachbeulanalyse* ist mit Einschränkungen verbunden, die für eine numerische Stabilitätsanalyse problematisch sein können. So kann nicht automatisch davon ausgegangen werden, dass es sich beim ermittelten kritischen Punkt um einen Verzweigungspunkt handelt. Eine systematische, stabilitätstheoretische Klassifizierung von Verzweigungs- und Durchschlagsproblemen ist erforderlich. Auf ein weiteres Problem, den Bezug auf den Primärpfad oberhalb λ^c , wurde schon unter 2. in Abschn. 3.4 hingewiesen.

Verallgemeinerte Nachbeulanalysen ermöglichen neben der detaillierten Klassifizierung kritischer Stabilitätspunkte die gleichzeitige Approximation des Primär- und des Sekundärpfades. Da der Sekundärpfad nicht mit Bezug auf den primären Pfad bestimmt wird, bezeichnet man die *Verallgemeinerte Nachbeulanalyse* als **direkte Methode**.

Die folgenden Ausführungen basieren im Wesentlichen auf [43] und [61].

3.6.1 Grundgleichungen

Ausgegangen wird wieder vom elastischen Potential:

$$\Pi(\mathbf{q}, \lambda) = \Psi(\mathbf{q}) - \lambda \mathbf{F} \mathbf{q}. \quad (3.37)$$

$\Psi(\mathbf{q})$ ist die innere Verzerrungsenergie, $\lambda \mathbf{F} \mathbf{q}$ das in den Verformungen \mathbf{q} lineare Lastpotential. \mathbf{F} soll ein verformungsunabhängiger, im allgemeinen Fall von λ abhängiger Lastvektor sein.

Sämtliche Gleichgewichtspfade werden, ausgehend von λ^c , durch die Verformungen \mathbf{q} und den Lastparameter λ beschrieben. Zwischen beiden Größen besteht ein indirekter Zusammenhang. Es wird angenommen, dass sich die beiden Größen über einen zusätzlichen Pfadparameter s miteinander koppeln lassen. Im kritischen Punkt - ($s = 0$) - werden die Pfade (\mathbf{q}, λ) nach s entwickelt. Die Approximationen lauten im Einzelnen:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(s) &= \mathbf{q}^c + \dot{\mathbf{q}}^c s + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{q}}^c s^2 + \frac{1}{6} \dddot{\mathbf{q}}^c s^3 + \frac{1}{24} \ddddot{\mathbf{q}}^c s^4 + \dots \\ \lambda(s) &= \lambda^c + \dot{\lambda}^c s + \frac{1}{2} \ddot{\lambda}^c s^2 + \frac{1}{6} \ddot{\lambda}^c s^3 + \frac{1}{24} \ddot{\lambda}^c s^4 + \dots\end{aligned}\quad (3.38)$$

Hierin bedeuten $\dot{}, \ddot{}, \dots$, usw. Ableitungen nach s . Das Ziel der *Verallgemeinerten Nachbeulanalyse* besteht in der Ermittlung der Koeffizienten

$$\dot{\mathbf{q}}^c, \ddot{\mathbf{q}}^c, \dot{\lambda}^c, \ddot{\lambda}^c, \dots$$

Gl.(3.37) wird ebenfalls nach s entwickelt:

$$\Pi(s) = \Pi^c + \dot{\Pi}^c s + \frac{1}{2} \ddot{\Pi}^c s^2 + \frac{1}{6} \ddot{\Pi}^c s^3 + \dots\quad (3.39)$$

Unter Verwendung der Ansätze Gl.(3.38) lautet Gl.(3.39) ausführlich (zur Vereinfachung wird an den inkrementellen Verformungs- und Lastgrößen der Index c weggelassen):

$$\begin{aligned}\Pi(s) &= \Pi^c \\ &+ \left(\Pi_{,q}^c \dot{\mathbf{q}} + \hat{\Pi}^c \dot{\lambda} \right) s \\ &+ \frac{1}{2} \left(\Pi_{,q}^c \ddot{\mathbf{q}} + \hat{\Pi}^c \ddot{\lambda} + 2\hat{\Pi}_{,q}^c \dot{\mathbf{q}} \dot{\lambda} + \Pi_{,qq}^c \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \hat{\Pi}^c (\dot{\lambda})^2 \right) s^2 \\ &+ \frac{1}{6} \left(\Pi_{,q}^c \dddot{\mathbf{q}} + \hat{\Pi}^c \dddot{\lambda} + 3\Pi_{,qq}^c \dot{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + 3\hat{\Pi}_{,q}^c (\dot{\mathbf{q}} \dot{\lambda} + \dot{\mathbf{q}} \dot{\lambda}) \right. \\ &+ \left. 3\hat{\Pi}^c \dot{\lambda} \ddot{\lambda} + \Pi_{,qqq}^c \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + 3\hat{\Pi}_{,qq}^c \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \dot{\lambda} + 3\hat{\Pi}_{,q}^c \dot{\mathbf{q}} (\dot{\lambda})^2 + \hat{\Pi}^c (\dot{\lambda})^3 \right) s^3 \\ &+ \dots\end{aligned}\quad (3.40)$$

Hierin stehen $\hat{}, \ddot{}, \dots$ usw. wieder für Ableitungen nach λ , die Symbole $\dots_{,q}, \dots_{,qq}$ usw. für Ableitungen nach \mathbf{q} .

Für benachbarte Gleichgewichtszustände muß gelten:

$$\frac{\partial \Pi(s)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{G}(s) = \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

Gl.(3.41) ergibt, geordnet nach den Potenzen von s :

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}^c + \dot{\mathbf{G}}^c s + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{G}}^c s^2 + \frac{1}{6} \dddot{\mathbf{G}}^c s^3 + \frac{1}{24} \ddddot{\mathbf{G}}^c s^4 + \dots = \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Voraussetzungsgemäß muß $\mathbf{G}^c = \mathbf{0}$ sein, die Koeffizienten $\dot{\mathbf{G}}^c, \ddot{\mathbf{G}}^c$ usw. müssen einzeln verschwinden. Somit stehen folgende Gleichungssysteme für die Ermittlung von $\dot{\mathbf{q}}, \dot{\dot{\mathbf{q}}}, \dot{\lambda}, \dots$ zur Verfügung:

$$\dot{\mathbf{G}}^c = \mathbf{K} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{F} \dot{\lambda} = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

$$\ddot{\mathbf{G}}^c = \mathbf{K} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{F} \ddot{\lambda} + (\mathbf{K}_{,q} \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + 2 \hat{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{q}} \dot{\lambda} - \hat{\mathbf{F}} \dot{\lambda}^2 = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \dddot{\mathbf{G}}^c = & \mathbf{K} \dddot{\mathbf{q}} - \mathbf{F} \dddot{\lambda} + 3(\mathbf{K}_{,q} \dot{\mathbf{q}}) \ddot{\mathbf{q}} + 3 \hat{\mathbf{K}} (\dot{\mathbf{q}} \ddot{\lambda} + \ddot{\mathbf{q}} \dot{\lambda}) - 3 \hat{\mathbf{F}} \dot{\lambda} \ddot{\lambda} + (\mathbf{K}_{,qq} \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \\ & + 3(\hat{\mathbf{K}}_{,q} \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \dot{\lambda} + 3 \hat{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{q}} \dot{\lambda}^2 - \hat{\mathbf{F}} \dot{\lambda}^3 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.45)$$

\vdots

Jedes dieser Gleichungssysteme besteht aus n linearen Gleichungen für $n+1$ Unbekannte. Dabei ist n im FE - Kontext die Anzahl der globalen Freiheitsgrade. Im einfachen kritischen Punkt besitzt \mathbf{K} einen einfachen Rangabfall. Damit sind jeweils nur $n-1$ unabhängige Gleichungen vorhanden. Zur eindeutigen Bestimmung der inkrementellen Verformungs- und Lastgrößen der Ordnung k werden somit zwei weitere Gleichungen benötigt.

3.6.2 Klassifizierung von kritischen Punkten

Gl.(3.43) wird mit dem Singulärvektor Φ multipliziert:

$$\Phi^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{q}} - \Phi^T \mathbf{F} \dot{\lambda} = 0. \quad (3.46)$$

Am kritischen Punkt ist die Singularitätsbedingung erfüllt:

$$\Phi^T \mathbf{K} = \mathbf{0}. \quad (3.47)$$

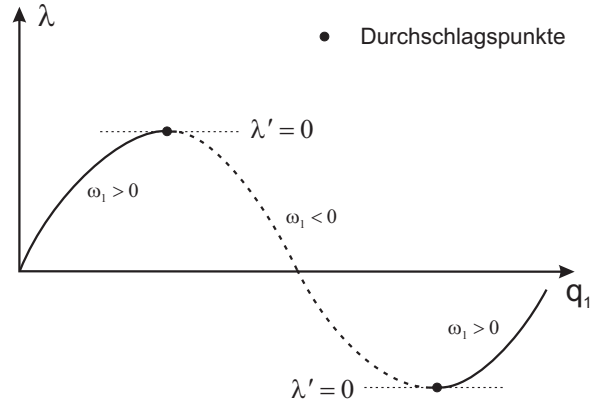


Abbildung 3.4: Durchschlagspunkte im Pfadverlauf

Die Kriterien zur Unterscheidung in Verzweigungs-, und Durchschlagspunkte lauten somit:

$$\text{Verzweigungspunkt: } \Phi^T \mathbf{F} = 0 \quad \text{mit: } \dot{\lambda} = 0 \text{ oder } \dot{\lambda} \neq 0 \quad (3.48)$$

$$\text{Durchschlagspunkt: } \dot{\lambda} = 0 \quad \text{mit: } \Phi^T \mathbf{F} \neq 0. \quad (3.49)$$

Die Orthogonalität zwischen dem Lastvektor \mathbf{F} und dem Eigenvektor Φ ist charakteristisch für einen Verzweigungspunkt, die horizontale Tangente $\dot{\lambda} = 0$ für einen Durchschlagspunkt, siehe Abb. 3.4.

3.6.3 Tangenten im Verzweigungspunkt

Im einfachen Verzweigungspunkt schneidet der sekundäre den primären Last - Verformungspfad. Damit existieren im Verzweigungspunkt zwei Tangenten. Die Tangente an den Primärpfad ist im Allgemeinen nicht bekannt. Die Größen $\dot{\mathbf{q}}^p, \dot{\lambda}^p$ beschreiben die Tangente an den Primärpfad, für die Tangente an den Sekundärpfad müssen $\dot{\mathbf{q}}^s, \dot{\lambda}^s$ ermittelt werden. Gl.(3.42) muß, unabhängig voneinander, für beide Pfade erfüllt sein.

Allein aus Gl.(3.43) können die Tangenten nicht ermittelt werden, da nur $n - 1$ voneinander unabhängige Gleichungen vorhanden sind. Es wären ∞^2 Lösungen möglich. Durch Hinzufügen von Normierungsbedingungen, die q_i und/oder $\dot{\lambda}$ vorgeben, läßt sich der Lösungsumfang für beide Pfade auf ∞^1 reduzieren.

Die zusätzlich notwendige Gleichung zur eindeutigen Bestimmung der Tangenten erhält man, indem die quadratische Änderung der Gleichgewichtsbe-

dingungen $\dot{\mathbf{G}}^c$, Gl.(3.44), mit $\mathbf{\Phi}$ multipliziert wird:

$$\mathbf{\Phi}^T \dot{\mathbf{G}}^c = \mathbf{\Phi}^T (\mathbf{K}_{,q} \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{q}} \dot{\lambda} - \mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{F}} (\dot{\lambda})^2 = 0. \quad (3.50)$$

Hier wurden bereits Gl.(3.47) für den kritischen Punkt und Gl.(3.48) für einen Verzweigungspunkt berücksichtigt.

Für die Gesamtheit aller möglichen Tangentenlösungen wird folgender Ansatz gewählt:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{q}} + \alpha \mathbf{\Phi}. \quad (3.51)$$

Hierin sind die Tangentenlösungen $\dot{\mathbf{q}}^p$ und $\dot{\mathbf{q}}^s$ für den primären bzw. sekundären Pfad enthalten. $\tilde{\mathbf{q}}$ stellt eine spezielle Lösung dar. Sie wird für $\dot{\lambda} = 1.0$ aus dem folgenden singulären Gleichungssystem berechnet:

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{F}. \quad (3.52)$$

Aufgrund der Singularität von \mathbf{K} muß zur eindeutigen Bestimmung von $\tilde{\mathbf{q}}$ eine Nebenbedingung hinzugefügt werden, z.B.:

$$\tilde{\mathbf{q}} \perp \mathbf{\Phi} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Phi}^T \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}^\perp. \quad (3.53)$$

Zur Darstellung von $\dot{\mathbf{q}}^p$ wird entsprechend Gl.(3.51) ebenfalls der Singulärvektor $\mathbf{\Phi}$ herangezogen, da $\tilde{\mathbf{q}}$ eine spezielle Lösung ist, für die im Allgemeinen $\tilde{\mathbf{q}} \neq \hat{\mathbf{q}}^p$ gilt.

Wird in Gl.(3.50) für $\dot{\mathbf{q}}$ Gl.(3.51) eingesetzt, führt dies auf die folgende, als Verzweigungsgleichung bezeichnete, quadratische Gleichung für $\dot{\lambda}$:

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\dot{\lambda} + C\dot{\lambda}^2 = 0 \quad (3.54)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{\Phi}^T (\mathbf{K}_{,q} \mathbf{\Phi}) \mathbf{\Phi} \\ B &= \left[\mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^T (\mathbf{K}_{,q} \mathbf{\Phi}) \tilde{\mathbf{q}} \right] \\ C &= \left[\mathbf{\Phi}^T (\mathbf{K}_{,q} \tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}} + 2\mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{F}} \right]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Die beiden Lösungen für den linearen Zuwachs des Lastparameters auf dem Primär- und dem Sekundärpfad lauten somit:

$$\dot{\lambda}_{1,2} = -\frac{\alpha B}{C} \pm \frac{\alpha}{C} \sqrt{B^2 - AC}. \quad (3.56)$$

Im weiteren wird $B^2 - AC > 0$ vorausgesetzt. Der hier noch unbekannte Wert α wird letztendlich durch die Einführung von Normierungsbedingungen für den Primär- und den Sekundärpfad berechnet. Die Kleinere der beiden Lösungen aus Gl.(3.56) gilt in der Regel für den Sekundärpfad.

Festzuhalten ist an dieser Stelle, dass die Kombination aus folgenden Gleichungssystemen und Gleichungen die eindeutige Bestimmung der Tangenten $(\acute{\lambda}^p, \acute{q}^p)$ und $(\acute{\lambda}^s, \acute{q}^s)$ ermöglichte:

1. das lineare Gleichungssystem Gl.(3.43) mit $n - 1$ unabhängigen Gleichungen,
2. die quadratische Verzweigungsgleichung Gl.(3.54),
3. zwei Normierungsbedingungen für $\acute{\lambda}$ und/oder \acute{q} .

Als Normierungsbedingungen kommen verschiedene Vorgaben in Frage, die für den Primär- und Sekundärpfad auch unterschiedlich sein können. Für die Tangentenlösung bedeutet dies jedoch lediglich eine Skalierung der Tangente, ihr prinzipieller Verlauf wird dadurch nicht verändert. Die konkreten Schritte bei der numerischen Umsetzung der Tangentenlösung werden in Abschn. 3.8 behandelt.

3.6.4 Asymmetrische und symmetrische Verzweigung

Anhand des Ergebnisses der Verzweigungsgleichung Gl.(3.56) kann für das vorliegende Verzweigungsproblem eine detailliertere Klassifizierung vorgenommen werden.

Gilt in Gl.(3.54) für die Koeffizienten $A \neq 0$ und $C \neq 0$, lauten die beiden Tangenten:

$$\acute{\lambda}^p = \acute{\lambda}_1 \quad \acute{q}^p = \acute{\lambda}^p \tilde{q} + \alpha^p \Phi \quad (3.57)$$

$$\acute{\lambda}^s = \acute{\lambda}_2 \quad \acute{q}^s = \acute{\lambda}^s \tilde{q} + \alpha^s \Phi. \quad (3.58)$$

Das Vorhandensein eines Zuwachses $\acute{\lambda}$, sowohl auf dem Primär- als auch auf dem Sekundärpfad, kennzeichnet eine **asymmetrische Verzweigung**, wie sie in Abb. 3.5a) dargestellt ist.

Ergeben sich dagegen $A = 0$ und $C \neq 0$ lauten die Tangenten:

$$\acute{\lambda}^p = -\alpha^p \frac{2B}{C} \quad \acute{q}^p = \acute{\lambda}^p \tilde{q} + \alpha^p \Phi \quad (3.59)$$

$$\acute{\lambda}^s = 0 \quad \acute{q}^s = \alpha^s \Phi. \quad (3.60)$$

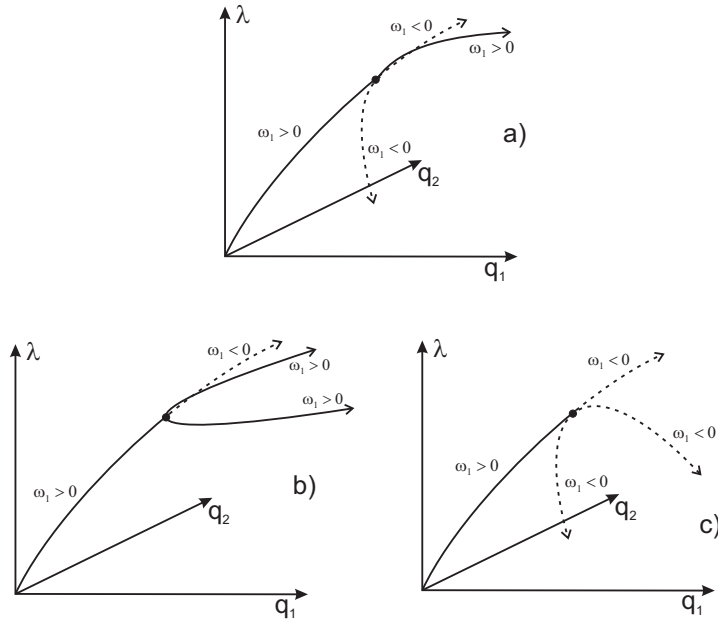


Abbildung 3.5: Verschiedene Arten von Verzweigungsproblemen für ein 2 - DOF - System

In diesem Fall handelt es sich um **symmetrische Verzweigungen**, die in den Abb. 3.5a) und b) abgebildet sind und die sich durch eine horizontale Tangente an den Sekundärpfad auszeichnen.

Aus mathematischer Sicht sind zur umfassenden Auswertung von Gl.(3.56) weitere Sonderfälle zu berücksichtigen, beispielsweise $B^2 - AC = 0$, $A = B = C = 0$ usw.. Erfahrungsgemäß sind diese Spezialfälle, die ausführlich in [61] untersucht werden, mehr theoretischer Natur. Ein in der praktischen numerischen Rechnung dagegen häufig vorkommender Sonderfall ist $C = 0$, auf den in Abschn. 3.8.2 näher eingegangen wird.

3.6.5 Quadratische Pfadinkremente im Verzweigungspunkt

Nachdem die Tangenten an den primären und den sekundären Pfad bestimmt wurden, können im nächsten Schritt die quadratischen Änderungen $\dot{\mathbf{q}}$ und $\dot{\lambda}$ für die beiden Pfade ermittelt werden. Insbesondere interessieren hier die quadratischen Änderungen des sekundären Pfades, da sie im Fall einer symmetrischen Verzweigung erst eine endgültige Klassifizierung ermöglichen. Bei einer asymmetrischen Verzweigung kann durch die Ermittlung der zusätzlichen Pfadinkremente die Pfadapproximation verbessert werden.

Für die Bestimmung der quadratischen Inkremente steht das singuläre Gleichungssystem Gl.(3.44) zur Verfügung:

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{F}\dot{\lambda} = - \left((\mathbf{K}_{,q}\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + 2\hat{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{q}}\dot{\lambda} - \hat{\mathbf{F}}\dot{\lambda}^2 \right). \quad (3.61)$$

In Gl.(3.61) sind jeweils die bekannten Tangenten $\dot{\mathbf{q}}$ und $\dot{\lambda}$ für den Primär- bzw. den Sekundärpfad einzusetzen.

Für eine eindeutige Bestimmung der quadratischen Inkremente werden aufgrund der vorliegenden Singularität im Verzweigungspunkt neben Gl.(3.61) wieder zwei zusätzliche Gleichungen benötigt. Eine Zusatzbedingung ergibt sich aus der gewählten Normierung für den Primär- bzw. Sekundärpfad. Die zweite zusätzliche Gleichung erhält man, unter Berücksichtigung von Gl.(3.47) und Gl.(3.48), aus der Multiplikation von Gl.(3.45) für den betrachteten Pfad mit Φ :

$$\begin{aligned} \Phi^T \dot{\dot{\mathbf{G}}}^c &= 3\Phi^T (\mathbf{K}_{,q}\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + 3\Phi^T \hat{\mathbf{K}}(\dot{\mathbf{q}}\dot{\lambda} + \dot{\mathbf{q}}\dot{\lambda}) - 3\Phi^T \hat{\mathbf{F}}\dot{\lambda}\dot{\lambda} \\ &+ \Phi^T (\mathbf{K}_{,qq}\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + 3\Phi^T (\hat{\mathbf{K}}_{,q}\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\dot{\lambda} \\ &+ 3\Phi^T \hat{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{q}}\dot{\lambda}^2 - \Phi^T \hat{\mathbf{F}}\dot{\lambda}^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Für die Bestimmung der Krümmungen $\dot{\lambda}^p, \dot{\mathbf{q}}^p$ und $\dot{\lambda}^s, \dot{\mathbf{q}}^s$ stehen somit zur Verfügung:

1. ein lineares Gleichungssystem Gl.(3.61) für den jeweiligen Pfad mit $n-1$ unabhängigen Gleichungen,
2. jeweils eine zusätzliche Gl.(3.62) und
3. für jeden Pfad eine Normierungsbedingung für $\dot{\lambda}$ und/oder $\dot{\mathbf{q}}$.

Hervorzuheben ist, dass das System für die Bestimmung der Größen der Ordnung k , hier $k = 2$, immer nur Größen der Ordnung $\leq k$ und damit ausschließlich schon vorher ermittelte Größen enthält.

3.6.6 Klassifizierung symmetrischer Verzweigungen

Im Fall einer symmetrischen Verzweigung gilt für den Sekundärpfad $\dot{\lambda}^s = 0$. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung der Krümmung. Mit der Tangentenlösung der symmetrischen Verzweigung aus Abschn. 3.6.4 lauten Gl.(3.61) und Gl.(3.62):

$$K\dot{q}^s - F\dot{\lambda}^s = -(\alpha^s)^2(K_{,q}\Phi)\Phi \quad (3.63)$$

$$\Phi^T \left[3\alpha^s(K_{,q}\Phi)\dot{q}^s + 3\alpha^s\hat{K}\Phi\dot{\lambda}^s + (\alpha^s)^3(K_{,qq}\Phi\Phi)\Phi \right] = 0. \quad (3.64)$$

Durch das Hinzufügen einer Normierungsbedingung können schließlich $\dot{\lambda}^s$ und \dot{q}^s berechnet werden.

Formal lautet die Bestimmungsgleichung für $\dot{\lambda}^s$:

$$\dot{\lambda}^s = -\frac{(\alpha^s)^2\Phi^T(K_{,qq}\Phi\Phi)\Phi + 3\Phi^T(K_{,q}\Phi)\dot{q}^s}{3\Phi^T\hat{K}\Phi}. \quad (3.65)$$

Somit kann eine symmetrische Verzweigung vollständig klassifiziert werden durch:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^s < 0 &\rightarrow \text{symmetrisch instabil} \\ \dot{\lambda}^s > 0 &\rightarrow \text{symmetrisch stabil.} \end{aligned}$$

In Abb. 3.5 sind eine symmetrisch stabile - Fall b) - und eine symmetrisch instabile Verzweigung - Fall c) - symbolisch dargestellt.

Aus praktischer Sicht stellt der Fall einer instabil symmetrischen Verzweigung ein besonders gefährliches Stabilitätsproblem dar, während eine stabil symmetrische Verzweigung als ein „gutartiges“ Problem anzusehen ist, da hier, im Gegensatz zur symmetrisch instabilen Verzweigung, eine Laststeigerung über den Verzweigungspunkt hinaus möglich ist.

Mit den vorliegenden Lösungen für die Tangenten und Krümmungen läßt sich der Sekundärpfad quadratisch approximieren. Soll eine höhere Approximationsgüte erzielt werden, sind weitere Anteile in Gl.(3.38), unter Heranziehung von \ddot{G}^c , $\ddot{\ddot{G}}^c$ usw., zu ermitteln. Zur Klassifizierung eines Verzweigungsproblems reicht es jedoch aus, die linearen und quadratischen Änderungen zu berechnen.

3.6.7 Durchschlagspunkt

Im Durchschlagspunkt gilt $\dot{\lambda} = 0$. Gl.(3.43) wird damit erfüllt von jedem:

$$\dot{\mathbf{q}} = \alpha \mathbf{\Phi}. \quad (3.66)$$

Die Verschiebung im Nachbeulbereich geht in Richtung des Singulärvektors. Ob es sich beim Durchschlagspunkt um ein Lastmaximum oder -minimum handelt, läßt sich anhand des Vorzeichens von $\dot{\lambda}$ feststellen. Zur Bestimmung von $\dot{\lambda}$ wird Gl.(3.44) mit $\mathbf{\Phi}$ multipliziert:

$$\mathbf{\Phi}^T \dot{\mathbf{G}}^c = \mathbf{\Phi}^T \left[-\mathbf{F} \dot{\lambda} + (\mathbf{K}_{,q} \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \right] = 0. \quad (3.67)$$

Mit Gl.(3.66) ergibt sich:

$$\dot{\lambda} = \alpha^2 \frac{A}{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}}. \quad (3.68)$$

Bei $\dot{\lambda} < 0$ handelt es sich um einen Durchschlagspunkt mit einem Lastmaximum, bei $\dot{\lambda} > 0$ mit einem Lastminimum. Zusammen mit einer Normierungsbedingung kann, wenn erforderlich, $\dot{\mathbf{q}}$ aus Gl.(3.44) ermittelt werden.

3.7 Koitersche und Verallgemeinerte Nachbeulanalyse - ein Vergleich

Zwischen der *Verallgemeinerten Nachbeulanalyse* und der *Koiterschen Nachbeulanalyse* muß, insbesondere wenn man die approximierte Fassung nach Abschn. 3.5 betrachtet, ein enger Zusammenhang bestehen. In [61] ist ausführlich dargestellt, wie sich die *Koitersche Nachbeulanalyse* als Spezialfall in die Behandlung der parametrisierten Gleichgewichtsbedingungen einordnen läßt. Im Folgenden werden davon einige Aspekte aufgegriffen, die den Zusammenhang der beiden Methoden verdeutlichen.

Den Ausgangspunkt der *Verallgemeinerten Nachbeulanalyse* bildete die Parametrisierung des primären und des sekundären Gleichgewichtspfad über einen Pfadparameter „s“. Da der primäre Pfad in der *Koiterschen Nachbeulanalyse* als bekannt vorausgesetzt wird, kann die Parametrisierung jetzt

auf die Verschiebungsdifferenz \mathbf{u} zwischen Primär- und Sekundärpfad bezogen werden. Ausgehend von $(\mathbf{q}^p(\lambda^e), \lambda^e)$ auf dem Primärpfad lautet dann die Näherung für einen Gleichgewichtspunkt auf dem sekundären Pfad bei $\lambda = \lambda^e$:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^s(s) &= \mathbf{q}^p(\lambda^e) + \dot{\mathbf{q}}s + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}s^2 + \frac{1}{6}\dddot{\mathbf{q}}s^3 + \frac{1}{24}\ddddot{\mathbf{q}}s^4 + \dots \\ \lambda^s(s) &= \lambda^e + \dot{\lambda}s + \frac{1}{2}\ddot{\lambda}s^2 + \frac{1}{6}\ddot{\lambda}s^3 + \frac{1}{24}\ddot{\lambda}s^4 + \dots\end{aligned}\quad (3.69)$$

Aus Gl.(3.51) ergibt sich die Tangente an den sekundären Pfad ohne den $\dot{\lambda}$ -behafteten Term zu:

$$\dot{\mathbf{q}} = \alpha \Phi. \quad (3.70)$$

Einsetzen von Gl.(3.70) in Gl.(3.50) führt wieder auf Gl.(3.54) mit den folgenden aktuellen Koeffizienten:

$$\begin{aligned}A &= \Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \Phi \\ B^* &= \Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi \\ C^* &= -\Phi^T \hat{\mathbf{F}}.\end{aligned}\quad (3.71)$$

Es fehlen hierin gegenüber Gl.(3.55) die mit $\tilde{\mathbf{q}}$ behafteten Terme.

Der Parameter λ_1 aus der *Koitorschen Nachbeulanalyse* lautete:

$$\lambda_1 = -\frac{\Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \Phi}{2\Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi}. \quad (3.72)$$

Wird in der *Verallgemeinerten Nachbeulanalyse* die Ableitung $\hat{\mathbf{F}}$ vernachlässigt, ergibt sich $C^* = 0$ und damit bei $\alpha = 1.0$:

$$\dot{\lambda}^s = -\frac{A}{2B^*} = \lambda_1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_1 = \Phi. \quad (3.73)$$

Die Auflösung von Gl.(3.62) nach $\dot{\lambda}^s$ ergibt mit dem Ansatz Gl.(3.70) im allgemeinen Fall:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^s = & - \frac{\alpha \Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \dot{\mathbf{q}}^s + \Phi^T \left(\hat{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{q}}^s + \alpha^2 (\hat{\mathbf{K}}_{,q} \Phi) \Phi \right) \dot{\lambda}^s}{\left(\alpha \Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi - \Phi^T \hat{\mathbf{F}} \dot{\lambda} \right)} \\ & - \frac{\frac{1}{3} \alpha^3 \Phi^T (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi) \Phi + \alpha \Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi \left(\dot{\lambda}^s \right)^2 + \frac{1}{3} \Phi^T \hat{\mathbf{F}} \left(\dot{\lambda}^s \right)^3}{\left(\alpha \Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi - \Phi^T \hat{\mathbf{F}} \dot{\lambda} \right)}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Die Lösung für λ_2 aus der *Koitorschen Nachbeulanalyse* lautete:

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & - \frac{\Phi^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_2 \lambda_1 + \frac{1}{2} \Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi \lambda_1^2 + \Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \mathbf{u}_2}{\Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi} \\ & - \frac{\frac{1}{2} \Phi^T \left(\hat{\mathbf{K}}_{,q} \Phi \right) \Phi \lambda_1 + \frac{1}{6} \Phi^T (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi) \Phi}{\Phi^T \hat{\mathbf{K}} \Phi}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Werden in Gl.(3.74) $\hat{\mathbf{F}}$ und $\hat{\hat{\mathbf{F}}}$ vernachlässigt, ergibt sich mit $\alpha = 1.0$ und Gl.(3.73) schließlich folgender Zusammenhang:

$$\dot{\lambda}^s = 2\lambda_2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^s. \quad (3.76)$$

Im Hinblick auf die *Koitorsche Nachbeulanalyse* bedeutet die Vernachlässigung der Ableitungen des Lastvektors $\hat{\mathbf{F}}$ und $\hat{\hat{\mathbf{F}}}$ eine „nicht vollständige Entwicklung der Gleichgewichtslösung im Rahmen der Anfangs - Nachbeulanalyse“ [61]. Dies ist jedoch eine mehr theoretische Aussage, da in der numerischen Berechnung in der Regel Terme wie $\hat{\mathbf{F}}$ oder $\hat{\hat{\mathbf{F}}}$ gar nicht vorhanden sind.

Zusammengefaßt kann festgestellt werden, dass die *Koitorsche Nachbeulanalyse* in ihrer approximierten Fassung tatsächlich einen Spezialfall der *Verallgemeinerten Nachbeulanalyse* darstellt. Neben $\zeta = s$ sind zur Überführung einige Terme zu vernachlässigen.

3.8 Umsetzung der Nachbeulanalyse in einer numerischen Stabilitätsanalyse

Die in den Abschn. 3.5 und 3.6 formulierten Rechenvorschriften für die inkrementellen Nachbeulgrößen sind in Berechnungsabläufe für eine numerische Stabilitätsanalyse umzusetzen. Die Herleitungen erfolgten zwar in einer FEM - orientierten Formulierung, für eine Übertragung in die numerische Analyse sind jedoch zusätzliche Überlegungen erforderlich. Die folgenden Sachverhalte treten dabei unabhängig vom jeweiligen FE - Programm auf, sie betreffen die FE - Formulierung und Verfahren der linearen Algebra.

Um die Unterschiede bei der Verwendung der *Koitorschen Nachbeulanalyse* in ihrer approximierten Fassung (**KN-A**) nach Abschn. 3.5 und der *Verallgemeinerten Nachbeulanalyse* (**VN**) nach Abschn. 3.6 zu verdeutlichen, werden hier beide Varianten hinsichtlich ihrer numerischen Umsetzung analysiert.

3.8.1 Spezielle Anpassungen im FEM - Kontext

In Gl.(3.27) der **KN-A** und in den Gl.(3.43)-(3.45) der **VN** treten Ableitungen der tangentiellen Steifigkeitsmatrix **K** im kritischen Punkt nach dem Lastparameter λ auf. Im Rahmen der FEM ist die Abhängigkeit der Steifigkeitsmatrix **K** von λ nicht explizit gegeben. Somit gilt:

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}_{,q} = \hat{\hat{\mathbf{K}}} = \mathbf{0}. \quad (3.77)$$

Für die **KN-A** hat das zu Folge, dass die beiden Lastparameter λ_1 und λ_2 nach Gl.(3.29) bzw. Gl.(3.31) nicht berechnet werden können. In [49] wird deshalb vorgeschlagen, die implizit gegebenen Abhängigkeiten $\lambda(\mathbf{q})$ zu berücksichtigen. Dies führt dann auf:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_{,q} \hat{\mathbf{q}}^p \\ \hat{\mathbf{K}}_{,q} &= \mathbf{K}_{,qq} \hat{\mathbf{q}}^p \\ \hat{\hat{\mathbf{K}}} &= \mathbf{K}_{,q} \hat{\hat{\mathbf{q}}}^p + \mathbf{K}_{,qq} \hat{\mathbf{q}}^p \hat{\mathbf{q}}^p + \dots \end{aligned} \quad (3.78)$$

Werden die Gl.(3.78) verwendet, lassen sich λ_1 und λ_2 endgültig ermitteln. In [61] wird dazu jedoch angemerkt, dass diese Ausdrücke nur Näherungen der tatsächlichen Ableitungen nach λ darstellen. Neben der Abhängigkeit von \mathbf{q}^p müßten zusätzlich die Abhängigkeiten von Φ , \mathbf{u}_2 usw. berücksichtigt werden.

In der **VN** treten in den Gl.(3.43)-(3.45) zusätzlich noch Ableitungen des Lastvektors nach λ auf. Beim globalen Vektor der äußeren Lasten **F** in

Gl.(3.37) handelt es sich in der Regel um einen festen, von λ unabhängigen Vektor. Damit entfallen, neben Gl.(3.77), auch folgende Ableitungen:

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\hat{\mathbf{F}}} = \mathbf{0}. \quad (3.79)$$

Die Koeffizienten der Verzweigungsgleichung Gl.(3.54) vereinfachen sich zu:

$$\begin{aligned} A &= \Phi^T(K_{,q}\Phi)\Phi \\ B &= \Phi^T(K_{,q}\Phi)\tilde{q} \\ C &= \Phi^T(K_{,q}\tilde{q})\tilde{q}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Die Bedingungen $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$ und $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$ haben für die **VN** zur Folge, dass $\dot{\lambda}^s$ nach Gl.(3.74) für die asymmetrische bzw. nach Gl.(3.65) für die symmetrische Verzweigung nicht berechnet werden können. Damit wäre eine Einschätzung zur Stabilität bzw. Instabilität von symmetrischen Verzweigungen unmöglich.

In [61] wird ein Berechnungsgang vorgeschlagen, der auf eine veränderte Formulierung für $\dot{\lambda}^s$ bei einer **symmetrischen Verzweigung** führt. In einem ersten Schritt wird dabei $\dot{\tilde{q}}$ ermittelt. Dazu wird Gl.(3.63) transformiert, was hier nicht weiter dargestellt wird. Schließlich ergibt sich $\dot{\tilde{q}}$ zu:

$$\dot{\tilde{q}}^s = \dot{\lambda}^s \tilde{q} + (\alpha^s)^2 \tilde{\tilde{q}}^\perp. \quad (3.81)$$

Dies gilt nur für den Fall einer symmetrischen Verzweigung ($A = 0$). Hierin ist \tilde{q} aus Gl.(3.52) bekannt, $\tilde{\tilde{q}}^\perp$ läßt sich ermitteln als spezielle Lösung des folgenden, inhomogenen singulären Gleichungssystems:

$$\mathbf{K}\tilde{\tilde{q}}^\perp = -(\mathbf{K}_{,q}\Phi)\Phi \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad \Phi^T\tilde{\tilde{q}}^\perp = 0. \quad (3.82)$$

$\dot{\tilde{q}}^s$ nach Gl.(3.81) muß Gl.(3.64) erfüllen. Somit läßt sich Gl.(3.64) für den Fall einer symmetrischen Verzweigung schließlich auflösen zu:

$$\dot{\lambda}^s = -(\alpha^s)^2 \frac{D + 3E}{3B} \quad (3.83)$$

mit

$$\begin{aligned} D &= \Phi^T(K_{,qq}\Phi\Phi)\Phi \\ E &= \Phi^T(K_{,q}\Phi)\tilde{\tilde{q}}^\perp \\ B &= \left[\Phi^T\hat{\mathbf{K}}\Phi + \Phi^T(K_{,q}\Phi)\tilde{q} \right] \text{ siehe Gl.(3.55)}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Da im Nenner jetzt B steht, kann $\dot{\lambda}^s$ trotz $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$ gelöst werden. Im symmetrischen Verzweigungspunkt gilt somit neben der Tangente an den sekundären Pfad nach Gl.(3.60) für dessen Krümmung:

$$\dot{\lambda}^s = -(\alpha^s)^2 \frac{D + 3E}{3B} \quad \dot{\mathbf{q}}^s = \dot{\lambda}^s \tilde{\mathbf{q}} + (\alpha^s)^2 \tilde{\mathbf{q}}^\perp. \quad (3.85)$$

Es besteht ein bedeutender Unterschied zu Gl.(3.65), und zwar kann hier eine Aussage zur Stabilität bzw. Instabilität einer symmetrischen Verzweigung getroffen werden, ohne den konkreten α - Wert bestimmen zu müssen.

Soll im Fall einer **asymmetrischen Verzweigung** zur Verbesserung der Pfadapproximation $\dot{\lambda}^s$ ermittelt werden, läßt sich Gl.(3.74) wiederum wegen $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$ und $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$ nicht unmittelbar verwenden. Darüber hinaus liegt auch eine Abhängigkeit $\dot{\lambda}^s(\dot{\mathbf{q}}^s)$ vor, was voraussetzt, dass $\dot{\mathbf{q}}^s$ bereits bekannt ist. Zur gleichzeitigen Berechnung der inkrementellen Größen $\dot{\lambda}^s$ und $\dot{\mathbf{q}}^s$ wird hier folgendes Vorgehen empfohlen:

Aus Gl.(3.44) bzw. Gl.(3.62) stehen folgende Gleichungssysteme bzw. Gleichungen zur Verfügung:

$$\mathbf{K} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{F} \dot{\lambda} = -(\mathbf{K}_{,q} \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.86)$$

$$3\Phi^T(\mathbf{K}_{,q} \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = -\Phi^T(\mathbf{K}_{,qq} \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.87)$$

Zusätzlich ist aufgrund der vorzugebenden Normierungsbedingung, auf deren Wahl in Abschn. 3.8.4 noch eingegangen wird, eine Unbekannte bereits bekannt, z.B.:

$$\dot{q}_1 = 0. \quad (3.88)$$

Weiterhin existiert bereits die Tangentenlösung für den sekundären Pfad:

$$\dot{\mathbf{q}}^s = \dot{\lambda}^s \tilde{\mathbf{q}} + \alpha^s \Phi. \quad (3.89)$$

Über die gewählte Normierungsbedingung wird α^s bestimmt, anschließend wird die Tangentenlösung in Gl.(3.86) und Gl.(3.87) eingesetzt.

Schließlich ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{F} \\ (3\alpha(\mathbf{K}_{,q}\mathbf{\Phi})\mathbf{\Phi} + 3\acute{\lambda}(\mathbf{K}_{,q}\mathbf{\Phi})\tilde{\mathbf{q}})^T & 0 \end{bmatrix}^c \begin{pmatrix} \acute{\mathbf{q}} \\ \acute{\lambda} \end{pmatrix} \\
& = - \begin{pmatrix} \alpha^2(\mathbf{K}_{,q}\mathbf{\Phi})\mathbf{\Phi} + 2\acute{\lambda}\alpha(\mathbf{K}_{,q}\mathbf{\Phi})\tilde{\mathbf{q}} + \acute{\lambda}^2(\mathbf{K}_{,q}\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}} \\ \alpha^3 D + 3\acute{\lambda}\alpha^2 F + 3\acute{\lambda}^2\alpha G + \acute{\lambda}^3 H \end{pmatrix}. \quad (3.90)
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten lauten hierin:

$$\begin{aligned}
D &= \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{K}_{,qq}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi})\mathbf{\Phi} \\
F &= \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{K}_{,qq}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi})\tilde{\mathbf{q}} \\
G &= \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{K}_{,qq}\mathbf{\Phi}\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}} \\
H &= \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{K}_{,qq}\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}}. \quad (3.91)
\end{aligned}$$

Bei Gl.(3.90) handelt es sich um ein singuläres Gleichungssystem. Indem eine Normierungsbedingung, z.B. Gl.(3.88) eingefügt wird, kann das Gleichungssystem eindeutig nach $\acute{\mathbf{q}}$ und $\acute{\lambda}$ aufgelöst werden.

3.8.2 Sonderfall $C = 0$

Innerhalb der **VN** ist der Koeffizient C aus Gl.(3.80) zu ermitteln. In einigen praktischen Fällen ist die Tangente an den primären Pfad $\hat{\mathbf{q}}^p$ auch im Verzweigungspunkt bekannt. Handelt es sich beispielsweise um einen linearen Primärpfad, kann $\hat{\mathbf{q}}_0^p$ als spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}$ in Gl.(3.51) verwendet werden. Auch für $\hat{\mathbf{q}}^p$ muß Gl.(3.50) erfüllt sein:

$$\mathbf{\Phi}^T(\mathbf{K}_{,q}\hat{\mathbf{q}}^p)\hat{\mathbf{q}}^p = 0. \quad (3.92)$$

Somit gilt $C = 0$ nach Gl.(3.80). Damit reduziert sich Gl.(3.54) auf:

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\acute{\lambda} = 0. \quad (3.93)$$

Im Fall der **asymmetrischen Verzweigung** ($A \neq 0$) lautet die Tangente an den sekundären Pfad somit:

$$\acute{\lambda}^s = -\frac{A}{2B}\alpha \quad \acute{\mathbf{q}}^s = \acute{\lambda}^s\hat{\mathbf{q}}^p + \alpha^s\mathbf{\Phi}. \quad (3.94)$$

Für die **symmetrische Verzweigung** ($A = 0$) ergibt sie sich zu:

$$\dot{\lambda}^s = 0 \quad \dot{q}^s = \alpha^s \Phi. \quad (3.95)$$

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass in der Regel $\tilde{q} \neq \hat{q}^p$ gilt. Die spezielle Lösung \tilde{q} ist im Verzweigungspunkt durch Gl.(3.52) zu ermitteln. Gl.(3.52) entspricht während der Pfadverfolgung einem linearen Prädiktorschritt in „c“. Da es sich dabei um ein singuläres Gleichungssystem handelt, kann \hat{q}^p in „c“ nicht berechnet werden. Häufig wird als Näherung die Tangente an den Primärpfad in der Nähe von „c“ verwendet. Erfahrungsgemäß ist auch dieses Vorgehen aufgrund der nahezu singulären tangentiellen Steifigkeitsmatrix problematisch. In jedem Fall sollte die so ermittelte Tangente überprüft werden, beispielsweise durch die Kontrolle einzelner charakteristischer Freiheitsgrade oder der Norm $\|\hat{q}^p\|$. Eine falsche Tangentenlösung \hat{q}^p führt auf fehlerhafte Nachbeulkoeffizienten und damit möglicherweise zu Fehleinschätzungen hinsichtlich des Nachbeulverhaltens.

3.8.3 Zur Lösung singulärer Gleichungssysteme

Im Verlauf der Nachbeulanalyse sind, sowohl in der Fassung der **KN-A** als auch in der **VN**, singuläre Gleichungssysteme der Form $Kx = y$ zu lösen. Innerhalb der **KN-A** ist zur Bestimmung der Beulform 2. Ordnung Gl.(3.30), in der **VN** sind zur Ermittlung der speziellen Lösungen \tilde{q} bzw. \tilde{q}^\perp die singulären Gleichungssysteme Gl.(3.52) bzw. Gl.(3.82) aufzulösen.

Die einzelnen Gleichungssysteme sind im Verzweigungspunkt aufzustellen. Die tangentielle Steifigkeitsmatrix K erfährt im einfachen Verzweigungspunkt einen einfachen Rangabfall. Dadurch stehen jeweils nur $n - 1$ unabhängige Gleichungen für n Unbekannte zur Verfügung. Für eine eindeutige Lösung x ist eine zusätzliche Bedingung hinzuzufügen. Hierzu existiert eine Vielzahl von mathematischen Lösungsvarianten. Für die eigenen Nachbeulanalysen wurden zwei Methoden verwendet, die sich unkompliziert in numerische Algorithmen umsetzen lassen.

Am Beispiel der speziellen Lösung \tilde{q} aus der **VN** werden im Folgenden diese beiden Möglichkeiten dargestellt:

1. Auswahl einer speziellen Lösung $x \perp \Phi$ aus der Lösungsvielfalt durch das Hinzufügen einer Orthogonalitätsbedingung zum singulären Gleichungssystem. Dies bedeutet im speziellen Fall:

$$\Phi^T \tilde{q}^\perp = 0. \quad (3.96)$$

Das Gleichungssystem wird folgendermaßen um die Nebenbedingung erweitert:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \Phi \\ \Phi^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^\perp \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Dieses Gleichungssystem ist regulär und kann eindeutig gelöst werden. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass die Symmetrie der Koeffizientenmatrix erhalten bleibt. Von Nachteil ist jedoch, dass ihre FEM - typische Bandstruktur zerstört wird, was im Allgemeinen zu einem größerem Speicherbedarf und erhöhter Rechenzeit führt.

Innerhalb dieser Arbeit wurde diese Methode im Algorithmus für eine symmetrische Verzweigung, siehe Abschn. 3.8.7, angewendet.

2. Methode nach *Nelson* [41]. Hierzu wird eine ausgewählte Verformungskomponente in $\tilde{\mathbf{q}}$ vorgegeben durch:

$$\tilde{q}_i = 0 \quad \text{bei } \Phi_i \neq 0. \quad (3.98)$$

Anschließend wird das singuläre Gleichungssystem verändert durch:

$$K_{ii} = 1, F_i = 0, \quad K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad \text{für } j \neq i. \quad (3.99)$$

Für $\tilde{q}_1 = 0$ und $\Phi_1 \neq 0$ ergibt sich dann beispielsweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{q}_j \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Aufgrund der hinzugefügten Bedingung ist auch hier die vorhandene Singularität beseitigt, $\tilde{\mathbf{q}}$ kann eindeutig berechnet werden.

Diese Methode wurde für die Beispielrechnungen in Kapitel 4 im Fall einer asymmetrischen Verzweigung verwendet, ihr Einsatz wird in Abschn. 3.8.6 innerhalb des zugehörigen Berechnungsablaufes gezeigt.

3.8.4 Zur Wahl von Normierungsbedingungen

Häufig interessiert nicht nur die Art des Stabilitätsproblems, sondern auch der Verlauf des sekundären Gleichgewichtspfades in der Umgebung des Verzweigungspunktes. Eine Nachbeulanalyse in den praktisch relevanten Fassungen (**KN-A** und **VN**) liefert Pfadapproximationen in Abhängigkeit von den Parametern ζ bzw. s , die erst einmal abstrakte Größen darstellen. Für eine konkrete Pfadbeschreibung ist zwischen den Pfadparametern ζ bzw. s und den berechneten inkrementellen Größen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ bzw. $\dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, \dots$ ein Zusammenhang herzustellen. Dies geschieht durch das Hinzufügen von Normierungsbedingungen, was im Folgenden am Beispiel der **VN** gezeigt wird.

Bei den Herleitungen in Abschn. 3.6 wurde schon an verschiedenen Stellen darauf hingewiesen, dass zur Ermittlung der inkrementellen Zuwächse notwendigerweise Normierungsbedingungen hinzuzufügen sind. Die auftretenden singulären Gleichungssysteme lassen sich nur dann eindeutig auflösen, wenn eine zusätzliche, sich unmittelbar aus der gewählten Normierung ergebende Gleichung zur Verfügung steht.

Als Normierung für s wird häufig die maximale Durchbiegung oder der Lastparameter gewählt. Diese Bedingungen stellen Spezialfälle der folgenden linearen Nebenbedingung dar:

$$s = \mathbf{k}_q^T (\mathbf{q}(s) - \mathbf{q}^c) + k_\lambda (\lambda(s) - \lambda^c). \quad (3.101)$$

Hierin enthält \mathbf{k}_q die Koeffizienten für das Verformungsinkrement, k_λ den Koeffizienten des Lastinkrementes. Eine Reihenentwicklung von Gl.(3.101) am kritischen Punkt liefert folgende Normierungsbedingungen:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{k}_q^T \dot{\mathbf{q}} + k_\lambda \dot{\lambda} \\ 0 &= \mathbf{k}_q^T \ddot{\mathbf{q}} + k_\lambda \ddot{\lambda} \\ \dots & \end{aligned} \quad (3.102)$$

Bei Parametrisierung über λ lautet Gl.(3.101) beispielsweise:

$$s = (\lambda(s) - \lambda^c) \quad (\mathbf{k}_q = \mathbf{0}, k_\lambda = 1.0). \quad (3.103)$$

Aus Gl.(3.102) ergeben sich dann die Bedingungen:

$$\dot{\lambda} = 1.0, \quad \ddot{\lambda} = \ddot{\lambda} = \dots = 0. \quad (3.104)$$

Die Wahl der Normierungsbedingung ist nicht beliebig. Die vorstehende Bedingung könnte beispielsweise nicht für den sekundären Pfad bei einer symmetrischen Verzweigung oder für den Pfad durch einen Durchschlagspunkt verwendet werden, da hier $\dot{\lambda} = 0$ gelten muß.

Häufig wird s auch mit einem Freiheitsgrad aus \mathbf{q} , z.B. dem für die maximale Durchbiegung $\max w$, belegt:

$$s = (\max w(s) - \max w^c) \quad (k_\lambda = 0). \quad (3.105)$$

Für die inkrementellen Größen ergeben sich dann folgende Vorgaben:

$$\dot{w} = 1.0, \quad \dot{\dot{w}} = \ddot{w} = \dots = 0. \quad (3.106)$$

Für die Tangente ist die Wahl des Pfadparameters, außer mit den oben erwähnten Einschränkungen hinsichtlich $\dot{\lambda}$, prinzipiell beliebig. Die unterschiedlichen Normierungen bewirken lediglich eine Skalierung der Tangente. Werden allerdings die Pfade quadratisch approximiert, was z.B. bei einer symmetrischen Verzweigung notwendig ist, hat die gewählte Normierungsbedingung erheblichen Einfluß auf die Güte der Approximation des Gleichgewichtspfades. Dieses Problem stellt sich vor allem dann, wenn auch Gleichgewichtszustände in größerer Entfernung zum kritischen Punkt approximiert werden sollen.

In [61] wird anstelle der linearen eine quadratische Nebenbedingung verwendet. Entsprechend der Bogenlänge des Prädiktorschrittes aus dem Bogenlängenverfahren lautet diese Nebenbedingung:

$$\Delta s^2 = \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + \dot{\lambda}^2 = \|(\dot{\lambda} \tilde{\mathbf{q}} + \alpha \Phi)\| + \dot{\lambda}^2. \quad (3.107)$$

Im Fall der **asymmetrischen Verzweigung** mit $A \neq 0, C \in \mathbf{R}$ läßt sich Gl.(3.54) auch nach $\alpha_{1,2}(\dot{\lambda})$ auflösen. Anschließend werden die Lösungen für $\alpha_{1,2}(\dot{\lambda})$ in Gl.(3.107) eingesetzt und nach dem Lastinkrement $\dot{\lambda}(\Delta s)$ aufgelöst. Gibt man jetzt in der Rechnung das Bogenlängeninkrement Δs vor, erhält man die beiden Lösungen für $\dot{\lambda}$. Eingesetzt in $\alpha_{1,2}(\dot{\lambda})$ lauten α_1 und α_2 für den Primär- bzw. Sekundärpfad:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha^p &= \frac{\dot{\lambda}^p}{A} \left(-B + \sqrt{B^2 - AC} \right) \\ \alpha_2 = \alpha^s &= \frac{\dot{\lambda}^s}{A} \left(-B - \sqrt{B^2 - AC} \right). \end{aligned} \quad (3.108)$$

Handelt es sich dagegen um eine **symmetrische Verzweigung** mit $A = 0$ und $C \neq 0$ ergeben sich α_1 und α_2 direkt aus dem vorgegebenen Δs zu:

$$\begin{aligned}\alpha_1 = \alpha^p &= \frac{\Delta s}{\sqrt{\|\Phi - \frac{2B}{C}\tilde{q}^\perp\|^2 + 4\frac{B^2}{C^2}}} \\ \alpha_2 = \alpha^s &= \frac{\Delta s}{\|\Phi\|}.\end{aligned}\tag{3.109}$$

Festzuhalten ist, dass eine allgemein gültige Normierungsvorschrift nicht existiert. In einigen Veröffentlichungen wird prinzipiell von einer Normierung des Lastinkrementes ausgegangen, siehe Gl.(3.103) und (3.104). Dies ist jedoch nur im Falle einer asymmetrischen Verzweigung möglich, siehe oben! Inwieweit eine gewählte Normierungsbedingung das tatsächliche Strukturverhalten erfaßt, ist stark von der Erfahrung des Anwenders abhängig. Für praktische Fälle, bei denen sich der Verformungszustand auf dem sekundären Pfad durch zusätzliche Biegeverformungen auszeichnet, wie es beispielsweise in den Anwendungsbeispielen des Kapitels 4 der Fall ist, ist die Normierung über die maximale Durchbiegungsamplitude zu empfehlen.

3.8.5 Ableitungen der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}

Im Verlauf der Nachbeulanalyse sind Ableitungen der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} zu ermitteln. Die Ableitungen haben grundsätzlich nach sämtlichen Verformungsfreiheitsgraden zu erfolgen. Beschränkt man sich auf eine quadratische Approximation der Gleichgewichtspfade, sind erste und zweite Ableitungen, wie beispielsweise $(\mathbf{K}_{,q}\Phi)$ oder $(\mathbf{K}_{,qq}\Phi\Phi)$, bereitzustellen.

Die erforderlichen Ableitungen von \mathbf{K} können bereits bei der Formulierung eines Finiten Elementtyps, innerhalb des Programmcodes, vorgesehen werden. In [24] sind die dafür erforderlichen Schritte am Beispiel eines Schalenelementes dargestellt. Diese Vorgehensweise besitzt den Vorteil, dass exakte Ableitungen von \mathbf{K} möglich sind. Von Nachteil ist aber, dass die erforderlichen Ableitungen für jeden Finiten Elementtyp neu aufgestellt und programmiert werden müssen. In den am meisten verbreiteten FEM - Programmen stehen diese Ableitungen nicht zur Verfügung.

Es ist deshalb üblich, die Ableitungen von \mathbf{K} durch numerische Differentiation zu erzeugen. Dieses Vorgehen ist unabhängig vom jeweiligen Elementtyp. Allerdings sind Genauigkeitseinbußen zu verzeichnen, die besonders bei höheren Ableitungen problematisch sein können. Mathematische Grundlagen

zur numerischen Differentiation sind in [18] und [56], die Übertragung auf die numerische Analyse beispielsweise in [49] zu finden.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ebenfalls von der numerischen Differentiation Gebrauch gemacht.

Im Folgenden ist noch einmal zusammengestellt, an welchen Stellen Ableitungen von \mathbf{K} bei der \mathbf{VN} auftreten. Für die Berechnung des linearen Inkrements $\dot{\lambda}$ werden entsprechend Gl.(3.80) folgende skalare Größen benötigt:

$$\begin{aligned} A &= \Phi^T(K_{,q}\Phi)\Phi \\ B &= \Phi^T(K_{,q}\Phi)\tilde{q} \\ C &= \Phi^T(K_{,q}\tilde{q})\tilde{q}. \end{aligned}$$

Handelt es sich um eine **symmetrische** Verzweigung, sind zusätzlich für die Berechnung von $\dot{\lambda}$ nach Gl.(3.84) bereitzustellen:

$$\begin{aligned} D &= \Phi^T(K_{,qq}\Phi\Phi)\Phi \\ E &= \Phi^T(K_{,q}\Phi)\tilde{q}^\perp. \end{aligned}$$

Weiterhin muß für die Ermittlung von \tilde{q}^\perp nach Gl.(3.82) als vektorielle Größe berechnet werden:

$$(K_{,q}\Phi)\Phi.$$

Sollen im Falle einer **asymmetrischen** Verzweigung $\dot{\lambda}$ und $\dot{\mathbf{q}}$ berechnet werden, sind entsprechend Gl.(3.91) zu bestimmen:

$$\begin{aligned} D &= \Phi^T(K_{,qq}\Phi\Phi)\Phi \\ F &= \Phi^T(K_{,qq}\Phi\Phi)\tilde{q} \\ G &= \Phi^T(K_{,qq}\Phi\tilde{q})\tilde{q} \\ H &= \Phi^T(K_{,qq}\tilde{q}\tilde{q})\tilde{q}. \end{aligned}$$

Zusätzlich sind folgende Vektoren zu ermitteln:

$$(K_{,q}\Phi)\Phi, \quad (K_{,q}\Phi)\tilde{q}, \quad (K_{,q}\tilde{q})\tilde{q}.$$

Ganz allgemein sind erste und zweite Richtungsableitungen der Form $\mathbf{K}_{,q}\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{K}_{,qq}\mathbf{x}\mathbf{y}$ zu bilden.

Die erste Ableitung der Steifigkeitsmatrix kann durch ein Vorwärtsdifferenzenverfahren folgendermaßen approximiert werden:

$$\mathbf{K}_{,q}\mathbf{x} \approx \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}(\mathbf{q}^c + \epsilon\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{q}^c)). \quad (3.110)$$

Zur Steigerung der Genauigkeit kann ein zentrales Differenzenverfahren verwendet werden:

$$\mathbf{K}_{,q}\mathbf{x} \approx \frac{1}{2\epsilon} (\mathbf{K}(\mathbf{q}^c + \epsilon\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{q}^c - \epsilon\mathbf{x})). \quad (3.111)$$

Gegenüber dem Vorwärtsdifferenzenverfahren erfordert das zentrale Differenzenverfahren ein zweimaliges Aufstellen der Steifigkeitsmatrix sowohl bei $(\mathbf{q}^c + \epsilon\mathbf{x})$ als auch bei $(\mathbf{q}^c - \epsilon\mathbf{x})$ und damit einen erhöhten Speicherbedarf.

Die zweite Ableitung kann für $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ermittelt werden durch:

$$\mathbf{K}_{,qq}\mathbf{x}\mathbf{x} \approx \frac{1}{\epsilon^2} (\mathbf{K}(\mathbf{q}^c + \epsilon\mathbf{x}) - 2\mathbf{K}(\mathbf{q}^c) + \mathbf{K}(\mathbf{q}^c - \epsilon\mathbf{x})). \quad (3.112)$$

Innerhalb der numerischen Rechnung wird jeder Term in den Differentiationsvorschriften sofort mit einem Vektor nachmultipliziert. Dadurch müssen keine Matrizen, sondern lediglich Vektoren abgespeichert werden.

Der vollständige Differentiationsausdruck lautet beispielsweise für den Koeffizienten B :

$$B = \Phi^T (\mathbf{K}_{,q}\Phi) \tilde{\mathbf{q}} = \frac{1}{2\epsilon} \Phi^T (\mathbf{K}(\mathbf{q}^c + \epsilon\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}(\mathbf{q}^c - \epsilon\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}). \quad (3.113)$$

Innerhalb der verschiedenen Gesamtausdrücke für A, B, C usw. ist eine Umordnung der vektoriellen Größen möglich. Dadurch können zum einen die zweiten Ableitungen auf die Form $\mathbf{K}_{,qq}\mathbf{x}\mathbf{x}$ gebracht werden und zum anderen wird innerhalb der numerischen Rechnung der Berechnungsaufwand verringert.

In Anlehnung an [49] lassen sich die skalaren Größen der Nachbaranalyse

folgendermaßen effektiv berechnen:

$$\begin{aligned}
A &= \Phi^T(\mathbf{K}_{,q}\Phi)\Phi = \frac{1}{2\epsilon}\Phi^T(h1^+ - h1^-) \\
B &= \Phi^T(\mathbf{K}_{,q}\Phi)\tilde{q} = \frac{1}{2\epsilon}\Phi^T(h2^+ - h2^-) \\
C &= \Phi^T(\mathbf{K}_{,q}\tilde{q})\tilde{q} = \frac{1}{2\epsilon}\Phi^T(h4^+ - h4^-) \\
D &= \Phi^T(\mathbf{K}_{,qq}\Phi\Phi)\Phi = \frac{1}{\epsilon^2}\Phi^T(h1^+ + h1^-) \\
E &= \Phi^T(\mathbf{K}_{,q}\Phi)\tilde{q}^\perp = \frac{1}{2\epsilon}\tilde{q}^{\perp T}(h1^+ - h1^-) \\
F &= \Phi^T(\mathbf{K}_{,qq}\Phi\Phi)\tilde{q} = \frac{1}{\epsilon^2}\tilde{q}^T(h1^+ + h1^-) \\
G &= \Phi^T(\mathbf{K}_{,qq}\Phi\tilde{q})\tilde{q} = \frac{1}{\epsilon^2}\Phi^T(h3^+ + h3^-) \\
H &= \Phi^T(\mathbf{K}_{,qq}\tilde{q}\tilde{q})\tilde{q} = \frac{1}{\epsilon^2}\tilde{q}^T(h3^+ + h3^-).
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Hierin sind $h1^+, h1^-, h2^+$ usw. Hilfsvektoren, die vorab zu ermitteln sind. Sie lauten im Einzelnen:

$$\begin{aligned}
h1^+ &= \mathbf{K}(\mathbf{q}^c + \epsilon\Phi)\Phi & h1^- &= \mathbf{K}(\mathbf{q}^c - \epsilon\Phi)\Phi \\
h2^+ &= \mathbf{K}(\mathbf{q}^c + \epsilon\Phi)\tilde{q} & h2^- &= \mathbf{K}(\mathbf{q}^c - \epsilon\Phi)\tilde{q} \\
h3^+ &= \mathbf{K}(\mathbf{q}^c + \epsilon\tilde{q})\Phi & h3^- &= \mathbf{K}(\mathbf{q}^c - \epsilon\tilde{q})\Phi \\
h4^+ &= \mathbf{K}(\mathbf{q}^c + \epsilon\tilde{q})\tilde{q} & h4^- &= \mathbf{K}(\mathbf{q}^c - \epsilon\tilde{q})\tilde{q}.
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Der Differentiationsparameter ϵ kann erheblichen Einfluß auf die Genauigkeit der Ergebnisse besitzen, insbesondere, wenn zweite Ableitungen zu ermitteln sind. Nach [49] sollte ϵ in folgendem Bereich liegen:

$$10^{-8} < \frac{\epsilon\|\Phi\|}{\|\mathbf{q}^c\|} < 10^{-3}. \tag{3.116}$$

In [49] wird dieser Ausdruck jedoch sofort wieder in Frage gestellt, indem auf die Problemabhängigkeit aufmerksam gemacht wird.

Diese Aussage kann durch die eigenen Untersuchungen bestätigt werden, die zum Teil erheblich größere ϵ - Werte erforderten. Eine formelmäßige Festlegung von ϵ ist demnach kritisch zu bewerten. Speziell bei zweiten Ableitungen von \mathbf{K} ist die Sensitivität der Ableitung gegenüber ϵ zu überprüfen. Es kann erforderlich sein, für erste und zweite numerische Ableitungen unterschiedliche ϵ - Werte zu verwenden.

3.8.6 Berechnungsalgorithmus für eine Nachbeulanalyse bei asymmetrischer Verzweigung

Der folgende, im FE - Programmsystem *Stang* [6] erstellte Berechnungsablauf `postbuckling-asymm.s`, zeigt beispielhaft die Berechnung der linearen und quadratischen Nachbeulparameter bei einer **asymmetrischen Verzweigung** für eine spezielle Anwendung.

Das FE - Modell einschließlich der Randbedingungen - hier am Beispiel eines Schalensegmentes mit $K^S = 20$ aus Abschn. 4.5 - wurde vorab erzeugt und in der Datei `K20.save` binär abgespeichert. Die Struktur besitzt insgesamt 3825 globale Freiheitsgrade. In einer Vorlaufrechnung wurde der Verzweigungspunkt durch eine lineare Stabilitätsanalyse ermittelt. In der Datei `K20-c.rst` wurden der auf $\|\Phi^c\| = 1.0$ normierte Singulärvektor `sing-vector` und der Verschiebungszustand im Verzweigungspunkt `disp_critical` abgespeichert. Außerdem wurde im Zustand „0“ die Tangente an den primären Pfad, `primary_tangent`, berechnet. Es wird von einem linearen Primärpfad ausgegangen.

Die Bezeichnungen für die Hilfsvektoren zur Berechnung der Nachbeulkoeffizienten orientieren sich an Abschn. 3.8.5. Die Ableitungen der Steifigkeitsmatrix erfolgen durch numerische Differentiation, wobei für erste Ableitungen zentrale Differenzen ($\epsilon = \text{epsilon_1}$), für zweite Ableitungen Vorwärtsdifferentiationen ($\epsilon = \text{epsilon_2}$) verwendet werden.

```
%%% File: postbuckling-asymm.s  %%%

string create,, 30, model/
string read,, model K20,/
string append,, 2 model ".save", filename/
structure restore,, filename,/
global restraints, remove_rot_singular,,/

string append, replace, 2 model "_c.rst", filename/
input file, replace binary real vector, filename, sing_vector/
input file, replace binary real vector, filename, disp_critical/
input file, replace binary real vector, filename, primary_tangent/
object copy,, primary_tangent, q_special/
```

Einlesen der Ergebnisse für den Verzweigungspunkt: Φ^c mit $\|\Phi^c\| = 1.0$ und q^c . Als spezielle Lösung \tilde{q} wird hier die Tangente an den primären Pfad \hat{q}^p verwendet. Voruntersuchungen ergaben, dass es sich beim kritischen Stabilitätspunkt um eine Gleichgewichtsverzweigung handelt.

```

object create, real replace,, epsilon_1/
object read,, epsilon_1 1.0e-3,/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
    sing_vector epsilon_1, disp_modi+/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
    sing_vector \chs epsilon_1, disp_modi-/
node merge, doflist displacements, disp_modi+/,
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k+/
compact multiply, replace c_y, comp_k+ sing_vector, h1+/
compact multiply, replace c_y, comp_k+ q_special, h2+/
node merge, doflist displacements, disp_modi-/,
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k-/
compact multiply, replace c_y, comp_k- sing_vector, h1-/
compact multiply, replace c_y, comp_k- q_special, h2-/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
    q_special epsilon_1, disp_modi+/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
    q_special \chs epsilon_1, disp_modi-/
node merge, doflist displacements, disp_modi+/,
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k+/
compact multiply, replace c_y, comp_k+ q_special, h4+/
node merge, doflist displacements, disp_modi-/,
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k-/
compact multiply, replace c_y, comp_k- q_special, h4-/
object delete,, disp_modi+/,
object delete,, disp_modi-/,
object delete,, comp_k+/,
object delete,, comp_k-/,

```

Bereitstellen der Hilfsvektoren $h1^+, h1^-, h2^+, h2^-, h4^+, h4^-$ entsprechend Gl.(3.115). Als Differentiationsparameter für die numerische Differentiation wird hier $\epsilon = 0.001$ verwendet.

```

linalg lincomb, replace, 2 h1+ 1.0 h1- -1.0, A_1/
object operate, \div, A_1 epsilon_1,/
object operate, \div, A_1 2.0,/
linalg multiply, replace trans_first, sing_vector A_1, A/
linalg lincomb, replace, 2 h2+ 1.0 h2- -1.0, B_1/

```

```

object operate, \div, B_1 epsilon_1,/
object operate, \div, B_1 2.0,/
linalg multiply, replace trans_first, sing_vector B_1, B/
linalg lincomb, replace, 2 h4+ 1.0 h4- -1.0, C_1/
object operate, \div, C_1 epsilon_1,/
object operate, \div, C_1 2.0,/
linalg multiply, replace trans_first, sing_vector C_1, C/
object create, real replace,, lambda_linear/
object modify,, lambda_linear \chs \div A \mul 2.0 B,/
output print,, A,/
output print,, B,/
output print,, C,/
output print,, lambda_linear,/

```

Es wird der lineare Nachbeulkoeffizient λ^s berechnet (für $\alpha = 1.0$). Da als spezielle Lösung die primäre Tangente verwendet wird, kann von der vereinfachten Rechnung nach Abschn. 3.8.2 Gebrauch gemacht werden. Es ergibt sich $C \approx 0$. Die Ermittlung der einzelnen Koeffizienten A, B, C erfolgt nach Gl.(3.114). Da es sich um eine asymmetrische Verzweigung handelt, sind A und λ_{linear} verschieden von 0.

```

control gosub,, control_secondary_tangent,/

object create, real replace,, alpha/
object extract, row replace, sing_vector 1921, mode_middle/
object modify,, alpha \div 1.0 mode_middle,/
object operate, \mul, lambda_linear alpha,/
linalg lincomb, replace, 2 q_special lambda_linear
sing_vector alpha, q_linear/

```

An dieser Stelle wird die Normierungsbedingung für den Pfadparameter s nach Abschn. 3.8.4 eingeführt. In diesem Beispiel wurde dafür die Durchbiegung des Schalensegmentes in Feldmitte (DOF 1921) festgelegt, siehe dazu Gl.(3.105).

```

object create, real replace,, epsilon_2/
object read,, epsilon_2 10.0,/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
sing_vector epsilon_2, disp_modi+/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
sing_vector \chs epsilon_2, disp_modi-/

```

```

node merge, doflist displacements, disp_modi+,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k+/
compact multiply, replace c_y, comp_k+ sing_vector, h1+/
node merge, doflist displacements, disp_modi-,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k-/
compact multiply, replace c_y, comp_k- sing_vector, h1-/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
    q_special epsilon_2, disp_modi+/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
    q_special \chs epsilon_2, disp_modi-/
node merge, doflist displacements, disp_modi+,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k+/
compact multiply, replace c_y, comp_k+ sing_vector, h3+/
node merge, doflist displacements, disp_modi-,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k-/
compact multiply, replace c_y, comp_k- sing_vector, h3-/
object delete,, disp_modi+,/
object delete,, disp_modi-,/
object delete,, comp_k+,/
object delete,, comp_k-/,

```

Bereitstellen der Hilfsvektoren $h1^+, h1^-, h3^+, h3^-$ entsprechend Gl.(3.115). Der Differentiationsparameter ϵ wird hierfür neu definiert, in diesem Beispiel durch $\epsilon = 10.0$. Erfahrungsgemäß sind für die zutreffende Ermittlung von zweiten Ableitungen der Steifigkeitsmatrix nach Gl.(3.114) größere ϵ - Werte als bei ersten Ableitungen nötig.

```

linalg lincomb, replace, 2 h1+ 1.0 h1- 1.0, D_1/
object operate, \div, D_1 \pow epsilon_2 2.0,/
linalg multiply, replace trans_first, sing_vector D_1, D/
object copy, replace, D_1, F_1/
linalg multiply, replace trans_first, q_special F_1, F/
linalg lincomb, replace, 2 h3+ 1.0 h3- 1.0, G_1/
object operate, \div, G_1 \pow epsilon_2 2.0,/
linalg multiply, replace trans_first, sing_vector G_1, G/
object copy, replace, G_1, H_1/
linalg multiply, replace trans_first, q_special H_1, H/
object delete,, D_1,/

```



```

object delete,, F_1,/
object delete,, G_1,/
object delete,, H_1,/

```

Zur Berechnung der quadratischen Pfadinkremente $\dot{\lambda}$ und \dot{q} sind vorab die Koeffizienten D, F, G, H nach Gl.(3.114) zu ermitteln.

```

linalg lincomb, replace, 3 A_1 \pow alpha 2.0
      B_1 \mul \mul 2.0 lambda_linear alpha C_1 \pow
      lambda_linear 2.0, rhs_1/
linalg lincomb, replace, 2 B_1 \mul 3.0 lambda_linear
      A_1 \mul 3.0 alpha, lhs/
object create, real replace,, rhs_2/
object modify,, rhs_2 \add \add \add \mul D \pow alpha 3.0
\mul \mul \mul F 3.0 lambda_linear \pow alpha 2.0 \mul \mul
G 3.0 \pow lambda_linear 2.0 alpha \mul H \pow lambda_linear 3.0,/
node merge, doflist displacements, disp_critical,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace full,, full_k_c/
object create, real replace matrix, 3826 3826, koeff_matrix/
object assemble, part, full_k_c koeff_matrix 1 1,/
object delete,, full_k_c,/
object create, real replace,, zero/
object read,, zero 0.0,/
object operate, \chs, global_1,/
object assemble, part, global_1 koeff_matrix 1 3826,/
object append, add_rows, lhs zero,/
linalg transpose, replace, lhs, lhs_trans/
object assemble, row, lhs_trans koeff_matrix 3826,/
object create, real replace vector, 3826, p_vector/
object initialize,, p_vector 0.0,/
object modify,, p_vector (1921) 1.0,/
linalg transpose,, p_vector, p_vector_trans/
object assemble, row, p_vector_trans koeff_matrix 1921,/
object assemble, column, p_vector koeff_matrix 1921,/
object copy, replace, rhs_1, rhs/
object append, add_rows, rhs rhs_2,/
object operate, \chs, rhs,/
object modify,, rhs (1921) 0.0,/
linalg solve, replace exact, koeff_matrix rhs, solution/
object extract, replace part, solution 1 3825, q_quadratic/
object extract, replace row, solution 3826, lambda_quadratic/

```

```
output print,, lambda_quadratic,/
```

Aufstellen des linearen Gleichungssystems nach Gl.(3.90),
 Einarbeitung der Normierungsbedingung $\dot{q}_{1921} = 0.0$ und
 Lösen des Gleichungssystems.

```
monitor allocate, replace, 1,/
monitor create,, 1 0.55 0.1 0.4 0.4, deformation/
node merge,, q_quadratic,/
structure view, reference nonodes nosymbols, 1 10 45 0 10,/

control gosub,, control_secondary_curvature,/

control gosub,, output_file,/

control exit,,,/
```

```
#label control_secondary_tangent
linalg lincomb, replace, 2 q_special lambda_linear
      sing_vector 1.0, q_linear/
global vector, load, 2 loads_front 0.5 loads_back 0.5, global_1/
node merge, doflist displacements, disp_critical,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace full,, full_k_c/
linalg multiply, replace, full_k_c q_linear, res_1/
linalg lincomb, replace, 2 res_1 1.0 global_1
      \chs lambda_linear, result/
linalg norm, replace, result, control_1/
output print,, control_1/
object delete,, full_k_c,/
control return,,,/
```

Kontrolle der ermittelten Tangentenlösung für den se-
 kundären Pfad. Es muß gelten: Gl.(3.43) mit $\dot{q} = \dot{\lambda}\hat{q}^p + \Phi$
 ($\alpha = 1.0$).

```
#label control_secondary_curvature
node merge, doflist displacements, disp_critical,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace full,, full_k_c/
linalg multiply, replace, full_k_c q_quadratic, res_2/
```

```

linalg lincomb, replace, 3 res_2 1.0
    global_l \chs lambda_quadratic rhs_1, result/
linalg norm, replace, result, control_2/
output print,, control_2/
control return,,,/

```

Kontrolle der ermittelten Lösungen für die quadratischen Inkremente. Es muß gelten: Gl.(3.44) mit $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \hat{\mathbf{q}}^p + \mathbf{\Phi}$ ($\alpha = 1.0$) und $\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$.

```

#label output_file
output file, noappend binary, lambda_linear, K20_pb.rst/
output file, append binary, lambda_quadratic, K20_pb.rst/
output file, append binary, q_linear, K20_pb.rst/
output file, append binary, q_quadratic, K20_pb.rst/
control return,,,/

```

Zur korrekten Ermittlung der quadratischen Inkremente sind in der Regel mehrere Durchläufe nötig. Der Differentiationsparameter `epsilon_2` besitzt einen großen Einfluß auf die Ergebnisse der numerischen Differentiation. Es ist abzusichern, dass `epsilon_2` so gewählt wird, dass die Lösung für $\dot{\lambda}$ zuverlässig ist, das heißt sich auch bei geringfügig geänderten Differentiationsparameter ein konstanter Wert einstellt.

Der Vorteil der hier angegebenen Routine liegt in der gleichzeitigen Berechnung der quadratischen Inkremente $\dot{\lambda}$, $\dot{\mathbf{q}}$ durch ein lineares Gleichungssystem. Von Nachteil ist, dass die entstehende Koeffizientenmatrix `koeff_matrix` unsymmetrisch ist. Eine Verwendung von effektiveren Dreiecksmatrizen ist damit unmöglich. Außerdem weist die Koeffizientenmatrix keine Bandstruktur auf, was sich neben der Verwendung der vollen Matrix ebenfalls ungünstig auf die Rechenzeit auswirkt. Weiterhin stellte sich das zwischenzeitlich gleichzeitige Vorhandensein der Dreiecksmatrix `full_k_c` und der vollständigen Matrix `koeff_matrix` als problematisch heraus. Beide Matrizen müssen gemeinsam im Arbeitsspeicher gehalten werden, was entsprechende Ressourcen erfordert. Zur Vermeidung dieses Problems sind effektivere Speicherstrukturen möglich, was hier aber nicht weiter verfolgt wurde.

3.8.7 Berechnungsalgorithmus für eine Nachbeulanalyse bei symmetrischer Verzweigung

Der nachfolgende Algorithmus `postbuckling-symm.s` erlaubt im Fall einer **symmetrischen Verzweigung** eine Nachbeulanalyse. Der Algorithmus wurde bei der Stabilitätsanalyse von Platten aus Abschn. 4.4 verwendet.

Beim konkreten Fall handelt es sich um eine quadratische, gleichförmig druckbeanspruchte Platte mit $b/t = 60$ und RB 0, siehe Abschn. 4.4.1. Das FE - Modell einschließlich der Randbedingungen ist in der binären Datei `plate_1_60_RB0.save` abgespeichert. Ansonsten gelten die in Abschn. 3.8.6 gemachten Vorbemerkungen.

```
%%% File: postbuckling-symm.s  %%%

string create,, 30, model/
string read,, model plate_1_60_RB0,/
string append,, 2 model ".save", filename/
structure restore,, filename,/
global restraints, remove_rot_singular,,/

string append, replace, 2 model "_c.rst", filename/
input file, replace binary real vector, filename, sing_vector/
input file, replace binary real vector, filename, disp_critical/
input file, replace binary real vector, filename, primary_tangent/
object copy,, primary_tangent, q_special/
monitor allocate, replace, 1,/
monitor create,, 1 0.55 0.1 0.4 0.4, deformation/
node merge,, sing_vector,/
structure view, reference nonodes nosymbols, 1 0 0 -90 10,/

object create, real replace,, epsilon_1/
object read,, epsilon_1 1.0e-3,/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
    sing_vector epsilon_1, disp_modi+/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
    sing_vector \chs epsilon_1, disp_modi-/
node merge, doflist displacements, disp_modi+,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k+/
compact multiply, replace c_y, comp_k+ sing_vector, h1+/
compact multiply, replace c_y, comp_k+ q_special, h2+/
```

```

node merge, doflist displacements, disp_modi-,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k-/
compact multiply, replace c_y, comp_k- sing_vector, h1-/
compact multiply, replace c_y, comp_k- q_special, h2-/

linalg lincomb, replace, 2 h1+ 1.0 h1- -1.0, A_1/
object operate, \div, A_1 epsilon_1,/
object operate, \div, A_1 2.0,/
linalg multiply, replace trans_first, sing_vector A_1, A/
linalg lincomb, replace, 2 h2+ 1.0 h2- -1.0, B_1/
object operate, \div, B_1 epsilon_1,/
object operate, \div, B_1 2.0,/
linalg multiply, replace trans_first, sing_vector B_1, B/
object create, real replace,, lambda_linear/
object modify,, lambda_linear \chs \div A \mul 2.0 B,/
output print,, A,/
output print,, B,/
output print,, lambda_linear,/

```

Als spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}$ wurde wieder die Tangente an den primären Pfad $\hat{\mathbf{q}}^p$ verwendet. Damit muß C nicht berechnet werden, in der numerischen Analyse gilt $C \approx 0$. Die vereinfachte Rechnung nach Abschn. 3.8.2 ergibt hier $\dot{\lambda} = -8.1298e - 08 \approx 0$. Damit handelt es sich um eine symmetrische Verzweigung. Zur Klassifizierung der symmetrischen Verzweigung als stabil bzw. instabil ist im Weiteren $\dot{\lambda}$ zu ermitteln.

```

node merge, doflist displacements, disp_critical,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace full,, full_k_c/
object info,, sing_vector, nr_of_rows/
object modify, add, nr_of_rows 1,/
object create, replace lower_triangle real, nr_of_rows,
    koef_matrix_lt/
object assemble, part, full_k_c koef_matrix_lt 1 1,/
object delete,, full_k_c,/
object create, replace real,, one/
object modify,, one 1.0,/
object copy, replace, sing_vector, sing_vector_modi/
object append, add_rows, sing_vector_modi one,/

```

```

linalg transpose,, sing_vector_modi, sing_vector_modi_trans/
object assemble, row, sing_vector_modi_trans
      koeff_matrix_lt nr_of_rows,/
object delete,, sing_vector_modi,/
object delete,, sing_vector_modi_trans,/
object extract, compact replace, koeff_matrix_lt,
      koeff_matrix_comp/
object delete,, koeff_matrix_lt,/
compact factorize, replace, koeff_matrix_comp, koeff_matrix_sky/
linalg lincomb, replace, 2 h1+ 1.0 h1- -1.0, rhs/
object operate, \div, rhs epsilon_1,/
object operate, \div, rhs 2.0,/
object operate, \mul, rhs -1.0,/
object create, replace real,, zero/
object modify,, zero 0.0,/
object append, add_rows, rhs zero,/
compact solve, replace, koeff_matrix_sky rhs, q_ss_full/
object info,, sing_vector, nr_of_rows/
object extract, part replace, q_ss_full 1 nr_of_rows, q_ss/
linalg multiply, replace trans_first, sing_vector q_ss,
      control_q_ss/
output print,, control_q_ss,/
node merge,, q_ss,/
structure view, reference nonodes nosymbols, 1 0 0 -90 1000,/

```

Im vorstehenden Berechnungsblock wird die spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ ($=\mathbf{q}_{ss}$) nach Gl.(3.82) ermittelt. Dem singulären Gleichungssystem wird hier entsprechend Abschn. 3.8.3 die Nebenbedingung $\Phi^T \tilde{\mathbf{q}}^\perp = 0$ hinzugefügt, wodurch eine eindeutige Lösung möglich wird. Die Symmetrie der Koeffizientenmatrix bleibt erhalten, so dass hier vorteilhaft mit Dreiecksmatrizen (`koeff_matrix_lt`) und Matrizen in kompakter Speicherform (`koeff_matrix_comp`) gearbeitet werden kann. Am Ende des Berechnungsblockes erfolgt eine Kontrolle und Darstellung der berechneten Lösung $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$.

```

linalg lincomb, replace, 2 h1+ 1.0 h1- -1.0, E_1/
object operate, \div, E_1 epsilon_1,/
object operate, \div, E_1 2.0,/
linalg multiply, replace trans_first, q_ss E_1, E/

object create, real replace,, epsilon_2/
object read,, epsilon_2 50.0,/

```

```

linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
    sing_vector epsilon_2, disp_modi+/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0
    sing_vector \chs epsilon_2, disp_modi-/
node merge, doflist displacements, disp_modi+/,
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k+/
compact multiply, replace c_y, comp_k+ sing_vector, h1+/
node merge, doflist displacements, disp_modi-/,
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness replace,, comp_k-/
compact multiply, replace c_y, comp_k- sing_vector, h1-/
linalg lincomb, replace, 2 h1+ 1.0 h1- 1.0, D_1/
object operate, \div, D_1 \pow epsilon_2 2.0,/
linalg multiply, replace trans_first, sing_vector D_1, D/

object create, replace real,, lambda_quadratic/
object modify,, lambda_quadratic \mul \div \add D
    \mul 3 E \mul 3 B -1.0,/
output print,, lambda_quadratic,/

```

Die Berechnung des quadratischen Nachbeulparameters $\hat{\lambda}$ (=lambda_quadratic) erfolgt nach Gl.(3.83) für $\alpha = 1.0$. Im konkreten Fall ergibt sich $\hat{\lambda} = 1.1994$. Damit handelt es sich hier um eine symmetrisch stabile Verzweigung.

Auf die Darstellung nachgeordneter Schritte wie das Abspeichern der Ergebnisse und das Aufstellen einer Normierungsbedingung, die hier zur Klassifizierung des Problems nicht nötig ist, wird an dieser Stelle verzichtet.

3.9 Pfadwechsel

3.9.1 Praktisches Vorgehen

Die Ergebnisse einer Nachbeulanalyse können, wie in den Abschn. 3.4 und 3.6 beschrieben, dazu verwendet werden, eine Approximation für den Sekundärpfad zu erzeugen. Die erwähnten Schwierigkeiten wie beispielsweise bei der numerischen Differentiation oder der Wahl einer zutreffenden Normierungsbedingung beeinträchtigen jedoch diese Vorgehensweise. Alternativ bietet sich innerhalb der numerischen Stabilitätsanalyse an, im Verzweigungspunkt einen Pfadwechsel auf den sekundären Pfad vorzunehmen und diesen Pfad anschließend mit den bekannten Verfahren weiterzuverfolgen.

Für den Pfadwechsel können die Ergebnisse der Nachbeulanalyse verwendet werden [11, 31, 51]. Nach Abschn. 3.6.4 lautet die Tangente an den sekundären Pfad im allgemeinen Fall mit $C \neq 0$ bei einer **asymmetrischen** Verzweigung:

$$\dot{\lambda}^s = \dot{\lambda}_2 \quad \dot{\mathbf{q}}^s = \dot{\lambda}^s \tilde{\mathbf{q}} + \alpha^s \Phi.$$

Für eine **symmetrische** Verzweigung ist dies:

$$\dot{\lambda}^s = 0 \quad \dot{\mathbf{q}}^s = \alpha^s \Phi.$$

Indem ein Bogenlängeninkrement Δs vorgegeben wird, lassen sich entsprechend Abschn. 3.8.4 die konkreten α^s - Werte berechnen.

Diese Tangentenlösung wird, ausgehend vom Verzweigungspunkt $(\lambda^c, \mathbf{q}^c)$, als Prädiktor für den sekundären Pfad verwendet. Durch eine anschließende Korrektoriteration erfolgt ein Wechsel vom primären auf den sekundären Pfad. Der Ausgangspunkt der Korrektoriteration lautet somit:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda^c + \dot{\lambda}^s \\ \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}^c + \dot{\mathbf{q}}^s. \end{aligned} \tag{3.117}$$

Daneben existiert eine einfachere Pfadwechselmethode, die ohne vorherige Berechnung der Nachbeulparameter auskommt [21, 57, 62]. Dazu wird für den Prädiktorschritt zum sekundären Pfad lediglich das lineare Verformungsinkrement vorgegeben, während das Lastniveau - auch im Falle einer asymmetrischen Verzweigung - konstant gehalten wird. Der Prädiktorschritt lautet nach [62]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda^c \\ \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}^c + \mu \frac{\Phi}{\|\Phi\|}. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Hierin ist μ ein zu wählender Skalierungsfaktor. Auch im Falle einer asymmetrischen Verzweigung kann, trotz des eigentlich unzutreffenden Prädiktorschrittes auf der Lastseite, Konvergenz erreicht werden, da die Korrekturiterationen innerhalb eines Bogenlängenverfahrens eine Anpassung sowohl des Verformungs- als auch des Lastinkrementes vornehmen. Ein praktisches Anwendungsbeispiel für einen durchgeführten Pfadwechsel mit dieser Methode findet sich in [35].

Problematisch ist bei beiden Vorgehensweisen die Vorgabe von Δs bzw. μ , die den Prädiktorschritt skalieren. Ein zu großer Schritt kann zu Konvergenzproblemen, ein zu kleiner Prädiktorschritt zur Rückkehr auf den primären Pfad führen. Dies läßt sich durch die Kontrolle der Verformungen und eines Stabilitätskennwertes, wie z.B. ω_1 , feststellen.

In [62] wird vorgeschlagen, μ folgendermaßen zu berechnen, wobei das Vorzeichen von μ bestimmt, welcher Abschnitt des sekundären Pfades verfolgt werden soll:

$$\mu = \pm \frac{\|\mathbf{q}^c\|}{\tau} \quad \text{mit: } \tau \approx 100. \quad (3.119)$$

Diese Vorgabe kann durch die eigenen Untersuchungen nicht bestätigt werden. Oftmals war erst bei wesentlich größeren μ - Werten der Pfadwechsel erfolgreich, insbesondere dann, wenn $\|\mathbf{q}^c\|$ sehr klein war.

Auch eine „optimistische“ Aussage wie in [62], dass im Allgemeinen drei Versuche ausreichen sollten, einen Pfadwechsel zu erreichen, kann hier nicht bestätigt werden. Häufig waren bis zu 10 Versuche nötig, in einigen Fällen gelang ein Pfadwechsel überhaupt nicht. Dies betraf vor allem Fälle, bei denen die kritischen Lastniveaus nahe beieinander lagen.

Ein erfolgreicher Pfadwechsel kann dann, wie bei einem mehrfachen Verzweigungsproblem, nur durch eine Kombination verschiedener Singulärvektoren erreicht werden, siehe [62]. Wie in solchen Fällen die einzelnen Skalierungsfaktoren für eine zutreffende Überlagerung praktisch zu ermitteln sind, ist jedoch nicht geklärt.

3.9.2 Berechnungsalgorithmus für einen Pfadwechsel

Der folgende Berechnungsalgorithmus `path-switch.s` für einen Wechsel vom primären auf den sekundären Gleichgewichtspfad basiert im wesentlichen auf dem Pfadverfolgungsalgorithmus aus Anhang C. Die Berechnungsblöcke `linear_predictor`, `corrector_iterations` usw. können unverändert aus `critical-point.s` übernommen werden und werden deshalb hier nicht noch einmal aufgeführt.

Bei der untersuchten Struktur handelt es sich wieder um das Beispiel aus Abschn. 3.8.6. Vorausgesetzt wird, dass ein einfacher Verzweigungspunkt vorliegt und die erforderlichen Eingangsgrößen λ^c , \mathbf{q}^c , Φ in einer Datei zur Verfügung stehen, Einzelheiten dazu siehe Abschn. 3.8.6.

```
%%% File: path-switch.s  %%%

string create,, 30, model/
string read,, model K20,/
string append,, 2 model ".save", filename/
structure restore,, filename,/

control gosub,, initialize_path_switch,/

control gosub,, predictor_step,/

#label gofurther_secondary_path

control gosub,, linear_predictor,/

control gosub,, corrector_iterations,/

control gosub,, post_processing,/

control if,, failure 0 gofurther_secondary_path,/

control exit,,,/

#label initialize_path_switch
monitor allocate, replace, 3,/
monitor create,, 1 0.05 0.10 0.25 0.40, st_eigenvalue_1/
monitor create,, 2 0.67 0.10 0.30 0.40, disp_middle/
monitor create,, 3 0.45 0.55 0.50 0.40, structure/
structure view, scale, 3 10 45 0,/
```

```

string append, replace, 2 model "_c.rst", filename/
input file, replace binary real vector, filename, sing_vector/
input file, replace binary real vector, filename, disp_critical/
input file, replace binary real scalar, filename, lambda_critical/
object copy,, disp_critical, save_disp/
object copy,, lambda_critical, save_lambda/

element build, stiffness total,,/
global restraints, remove_rot_singular,,/
node merge, doflist displacements, sing_vector,/
structure image, deformed scale edges, 3 10 45 0 50.0,/
node merge, doflist displacements, disp_critical,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness,, comp_k/
compact factorize,, comp_k, sky_k/
compact iteigenstsy, skyline, comp_k sky_k 1,
    st_eigenvalue_1 st_eigenvector_1/
output print,, st_eigenvalue_1,/
global vector, load, 2 loads_front 0.5 loads_back 0.5, global_1/
object create, real,, epsilon_norm/
object read,, epsilon_norm 1e-5,/
linalg norm,, global_1, compare_norm/
object create, real,, arclength/
object read,, arclength 0.1,/
object create, real,, direction/
object read,, direction -1.0,/

object create, real replace,, proportion/
object modify, set, proportion \div save_lambda lambda_critical,/
object create, real matrix, 1 3 full_results/
object create, real matrix, 1 3 actual_results/
compact factorize,, comp_k, sky_k/
compact iteigenstsy, skyline, comp_k sky_k 1,
    st_eigenvalue_1 st_eigenvector_1/
object modify, set, full_results (1 1) proportion,/
object modify, set, full_results (1 2) st_eigenvalue_1,/
node extract, single displacements trans_dof, middle_node,
    disp_middle_node/
object modify, set, full_results (1 3) disp_middle_node (2),/
object create, integer,, number/
object read,, number 0,/
object copy,, save_disp, save_disp_all/

```

```

object copy,, save_lambda, save_lambda_all/
control return,,/

```

initialize_path_switch: Initialisierung des Bogenlängenverfahrens, des Post-Processings usw. analog **critical-point.s**. Außerdem werden der Last- und Verformungszustand **lambda_critical** bzw. **disp_critical** sowie der Singulärvektor **sing_vector** mit $\|\Phi = 1.0\|$ im Verzweigungspunkt eingelesen und der 1. Eigenwert ($\omega_1 \approx 0!$) und der Singulärvektor kontrolliert. Beim vorliegenden Problem handelt es sich um eine asymmetrische Verzweigung. Aktuell soll der abfallende Abschnitt des sekundären Pfades verfolgt werden. Aus diesem Grund wird die Prädiktorrichtung mit -1 festgelegt.

```

#label predictor_step
object create, real replace,, mue/
object read,, mue -0.7,/
linalg lincomb, replace, 2 disp_critical 1.0 sing_vector mue,
    predictor_disp/
object copy, replace, lambda_critical, lambda/
node merge, doflist displacements, predictor_disp,/
element build, res_force total,/
global vector, res_force,, restoring_force/
linalg lincomb,, 2 global_1 \chs lambda restoring_force 1,
    global_dforce/
object delete,, mue,/
object delete,, restoring_force,/

    control gosub,, corrector_iterations,/
    control gosub,, post_processing,/
control return,,/

```

predictor_step: Vorgabe des Prädiktorschrittes zum sekundären Pfad. Der Lastparameter λ wird konstant gehalten, das Verformungsinkrement ergibt sich aus $\mathbf{q}^c + \mu\Phi$. Der Skalierungsfaktor μ ist variabel, sein Vorzeichen ist abhängig von der Richtung von Φ und der Pfadrichtung. Der Block **corrector_iterations** siehe Anhang C.

```

#label post_processing
object modify, set, proportion \div save_lambda lambda_critical,/
object modify, set, actual_results (1 1) proportion,/

```

```

object modify, set, actual_results (1 2) st_eigenvalue_1,/
node extract, single displacements trans_dof, middle_node,
    disp_middle_node/
object modify, set, actual_results (1 3) disp_middle_node (2),/
object append, add_rows, full_results actual_results,/
output view, phase_plot title grid_both, 1 full_results 2
    "first_eigenvalue - load",/
output view phase_plot title grid_both, 2 full_results 3
    "disp_middle - load",/
object append, add_columns, save_disp_all save_disp,/
object append, add_rows, save_lambda_all save_lambda,/
structure view, reference nonodes nosymbols, 3 10 45 0 1.0,/
object modify, add, number 1,/
string convert, replace int_string no_space, number, nr/
string append, replace, 4 model "_secondary_" nr ".rst", filename/
output file, noappend binary, save_disp_all, filename/
output file, append binary, save_lambda_all, filename/
output file, append binary, full_results, filename/
control return,,/

```

Im konkreten Fall konnte mit dem vorstehenden Algorithmus auf den sekundären Pfad gewechselt werden, wenn $\mu = -0.7$ gewählt wurde. Dieser Wert wurde erst nach mehreren Versuchen ermittelt. Für andere Anwendungsfälle wird im Allgemeinen für μ ein anderer Wert erforderlich sein, siehe Abschn. 3.9.

3.10 Imperfekte Strukturen - Koitersche Imperfektionssensitivität

Die Stabilitätsanalysen der vorhergehenden Abschnitte erfolgten ausschließlich für geometrisch perfekte Strukturen. Ebenso wie der primäre stellt auch der sekundäre Pfad eines Verzweigungsproblems eine Charakteristik der perfekten Struktur dar.

In der Ingenieurpraxis interessiert vor allem eine Einschätzung des tatsächlichen Tragvermögens unter Berücksichtigung unvermeidbarer Imperfektionseinflüsse. Als Alternative zu den üblichen, mit hohem Berechnungsaufwand verbundenen Sensitivitätsstudien, bieten sich Untersuchungen auf der Basis der *Koiterschen Imperfektionssensitivität* [28] an. Unter Verwendung der zuvor ermittelten Nachbeulparameter lassen sich so mit geringem Berechnungsaufwand Approximationen für Pfadverläufe imperfekter Strukturen erzeugen und umfangreiche Parameterstudien zu Imperfektionsformen und -amplituden durchführen.

Als geometrische Imperfektionsformen werden in der Regel Eigenformen bzw. deren Kombinationen verwendet. Daneben können auch geometrische Imperfektionen infolge konstruktiver Gegebenheiten, z.B. Schweißnahtverzüge [63] oder gemessene Abweichungen, als Imperfektionsformen Ω berücksichtigt werden. Die Imperfektion läßt sich einheitlich beschreiben durch:

$$\bar{q} = \eta \Omega. \quad (3.120)$$

Hier ist η die aktuelle Imperfektionsamplitude, Ω wird normiert auf:

$$\|\Omega\| = 1.0. \quad (3.121)$$

Es wird angenommen, dass es sich bei den Imperfektionen um Abweichungen handelt, die klein gegenüber den Abmessungen der Struktur sind. Damit ähneln sich das Tragverhalten der perfekten und der imperfekten Struktur, insbesondere verlaufen die Gleichgewichtspfade nahe beieinander. Damit können imperfekte Pfade, ähnlich wie ein sekundärer Pfad, unter Nutzung der Ergebnisse einer Nachbeulanalyse approximiert werden.

Die Näherung für \mathbf{q}^i , den Verformungszustand der imperfekten Struktur, lautet analog zu Gl.(3.15):

$$\mathbf{q}^i(\lambda) = \mathbf{q}(\lambda) + \mathbf{u}(\lambda). \quad (3.122)$$

Hier sind $\mathbf{q}(\lambda)$ der aktuelle Verformungszustand der perfekten Struktur und $\mathbf{u}(\lambda)$ die Verformungsdifferenz zwischen perfektem und imperfektem System bei konstantem Lastniveau λ .

Der Potentialausdruck für die imperfekte Struktur ergibt sich aus dem Potential der perfekten Struktur und einer Potentialdifferenz. Analog zum Vorgehen bei der Nachbaranalyse werden wieder das Potential des Nachbarzustandes formuliert, der Potentialausdruck linearisiert und schließlich die Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet [28]. Übersichtlicher ist es, wie im Weiteren entsprechend [49] dargestellt, anstelle des Potentialausdruckes von den Gleichgewichtsbedingungen auszugehen.

Die Gleichgewichtsbedingungen der imperfekten Struktur sind danach zusätzlich abhängig von der Imperfektionsamplitude η . Sie können, ausgehend von der perfekten Struktur ($\eta = 0$), folgendermaßen approximiert werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^i(\mathbf{q}, \lambda, \bar{\mathbf{q}}) &= \mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) + \mathbf{G}_{,\bar{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \lambda)\Omega\eta + \frac{1}{2}\mathbf{G}_{,\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \lambda)\Omega\Omega\eta^2 + \dots \\ &= \mathbf{G} + \Delta\mathbf{G}.\end{aligned}\quad (3.123)$$

Hierin bedeutet $\dots_{,\bar{\mathbf{q}}}$ die Ableitung nach $\bar{\mathbf{q}}$ entlang der Gleichgewichtspfade der perfekten Struktur. Gl.(3.123) wird entlang des imperfekten Pfades nochmals in eine Reihe bezüglich λ und \mathbf{u} entwickelt. Entwicklungspunkt ist dabei der Verzweigungspunkt des perfekten Systems ($\mathbf{G}^c = 0!$). Für die Inkremente \mathbf{u} und $\Delta\lambda$ entlang des imperfekten Pfades werden in Anlehnung an Gl.(3.34) folgende Polynomansätze verwendet:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \zeta\mathbf{u}_1 + \zeta^2\mathbf{u}_2 + \zeta^3\mathbf{u}_3 + \dots \\ \Delta\lambda &= \zeta\lambda_1 + \zeta^2\lambda_2 + \eta\bar{\lambda}_1 + \eta^2\bar{\lambda}_2 \dots\end{aligned}\quad (3.124)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ usw. sind bereits aus einer Nachbaranalyse nach Abschn. 3.5 bekannt, die Größen $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ usw. sind zusätzlich zu ermitteln.

Gl.(3.123) wird vereinfacht, indem die Änderungen der von η abhängigen Terme nach λ und \mathbf{u} vernachlässigt werden. Außerdem wird nur der $\Delta\mathbf{G}$ dominierende, linear von η abhängige Term $\mathbf{G}_{,\bar{\mathbf{q}}}\Omega\eta$ berücksichtigt. Die Gleichgewichtsbedingungen für den imperfekten Pfad lauten schließlich:

$$\begin{aligned}&\text{Gl.(3.27) nach Abschn. 3.5} \\ + \quad \eta &\left(\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_1\bar{\lambda}_1\zeta + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_2\bar{\lambda}_1\zeta^2 + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_1\lambda_1\bar{\lambda}_1\zeta^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{K}}_{,\mathbf{q}}\mathbf{u}_1\right)\mathbf{u}_1\bar{\lambda}_1\zeta^2 + \mathbf{G}_{,\bar{\mathbf{q}}}\Omega\right) \\ + \quad \dots &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (3.125)$$

Wie in der Nachbeulanalyse wird Gl.(3.125) mit dem Singulärvektor Φ^c multipliziert. Die Terme bei ζ, ζ^2, η usw. müssen einzeln verschwinden. Aus dem Term bei η läßt sich $\bar{\lambda}_1$ bestimmen. Vernachlässigt man die quadratisch von ζ abhängigen Terme ergibt sich:

$$\bar{\lambda}_1 = -\frac{1}{\zeta} \frac{\Phi^{cT} \mathbf{G}_{,\bar{q}} \Omega}{\Phi^{cT} \hat{\mathbf{K}} \Phi^c}. \quad (3.126)$$

Die Größe $\bar{\lambda}_1$ geht als zusätzlicher, vom aktuellen ζ abhängiger Imperfektionsterm in die Lastapproximation ein, die dann lautet:

$$\lambda = \lambda^c + \zeta \lambda_1 + \zeta^2 \lambda_2 + \eta \bar{\lambda}_1. \quad (3.127)$$

In der numerischen Umsetzung wird, anstelle von $\hat{\mathbf{K}}$ in Gl.(3.126) - siehe Abschn. 3.8.1 - wieder $\mathbf{K}_{,q} \hat{q}^p$ verwendet. Zusätzlich ist $\mathbf{G}_{,\bar{q}} \Omega$ zu berechnen. Dies kann unproblematisch, entsprechend Abschn. 3.8.5, wiederum durch numerische Differentiation erfolgen. Die Ableitung lautet dann:

$$\mathbf{G}_{,\bar{q}} \Omega \approx \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda, \epsilon \Omega) - \mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda, \mathbf{0})). \quad (3.128)$$

Praktisch erfolgt somit eine Berechnung von Ungleichgewichtskräften. Sie ergeben sich, wenn ein aktueller Verformungszustand (der perfekten Struktur) auf eine geometrisch imperfekte Struktur ($\epsilon \Omega$) aufgebracht wird, und anschließend die daraus resultierenden Rückstellkräfte berechnet und der äußeren Belastung gegenübergestellt werden. So kann sukzessive für verschiedene ζ der Last - Verformungspfad der imperfekten Struktur konstruiert werden, ohne aufwändige Pfadverfolgungen durchführen zu müssen.

Die Tatsache, dass das Last - Verformungsverhalten einer imperfekten Struktur durch die Form, Richtung und Amplitude der Imperfektion beeinflusst wird, ist im Allgemeinen bekannt. Die Abhängigkeit vom Stabilitätsverhalten der zugeordneten perfekten Struktur wird in der Ingenieurpraxis jedoch zu wenig beachtet. Aus der Art des Stabilitätsproblems und dem Verlauf des sekundären Pfades können schon wesentliche Informationen gewonnen werden, um Imperfektionsanalysen effektiv durchführen zu können. Hierzu zählen:

- Im Falle einer **asymmetrischen Verzweigung** nach Abb. 3.6 a) kann sofort auf die maßgebliche, zu Tragfähigkeitseinbußen führende Imperfektionsrichtung geschlossen werden. Dies gilt für kleine Imperfektionen und für Imperfektionsformen, die affin zu Φ^c sind, mindestens jedoch wesentliche Anteile des Singulärvektors enthalten.

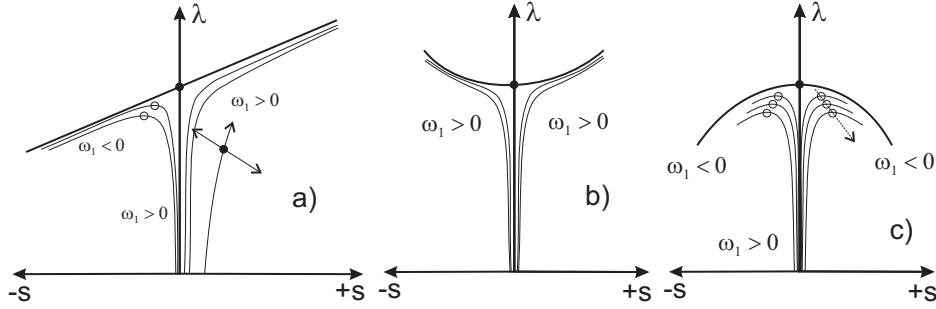


Abbildung 3.6: Imperfekte Pfade in Abhängigkeit von der Art des Verzweigungsproblems

- Bei den **symmetrischen Verzweigungen** nach Abb. 3.6 b) und c) ändert sich lediglich die Verformungsrichtung in Abhängigkeit vom Vorzeichen von η , nicht jedoch das prinzipielle Verhalten.
- Sind abfallende sekundäre Pfadabschnitte bzw. Pfade vorhanden wie in den Fällen a) und c), können die imperfekten Strukturen, wie auch die ursprünglich perfekte Struktur, ebenfalls Stabilitätsprobleme aufweisen. Wird wieder vorausgesetzt, dass die Imperfektionsamplituden klein sind und es sich um Imperfektionsformen handelt, die ähnlich zum Singulärvektor Φ^c sind, können die kritischen Stabilitätspunkte als Durchschlagspunkte λ^{cl} mit Lastmaxima identifiziert werden [19].
- Strukturen, die Stabilitätsprobleme nach a) bzw. c) aufweisen, sind unter Sicherheitsaspekten besonders gefährlich. Auch schon bei kleinen Imperfektionsamplituden können erhebliche Tragfähigkeitsverluste gegenüber λ^c auftreten, die umso höher ausfallen, je größer der Abfall der Tangente an den Sekundärpfad (Fall a)) bzw. die Krümmung (Fall c)) ist. Ein Vergleich von berechneten Nachbeulparametern ermöglicht demnach bereits eine qualitative Aussage zur Imperfektionsanfälligkeit verschiedener Strukturen bei gleicher Art des Verzweigungsproblems.

Die Durchschlagspunkte ergeben sich anhand der Extremwerte der Kurve nach Gl.(3.127). Bei **asymmetrischen Verzweigungsproblemen** ist λ_1 in der Umgebung von λ^c dominant, so dass λ_2 in der Regel vernachlässigt werden kann.

Aus $\frac{d\lambda}{d\zeta} = 0$ ergibt sich das Lastmaximum zu:

$$\zeta^{cl} = \sqrt{-\frac{\eta}{\lambda_1} \frac{\Phi^{cT} G_{,\bar{q}} \Omega}{\Phi^{cT} \hat{K} \Phi^c}} \quad \rightarrow \quad \lambda^{cl} = \lambda^c - 2 \sqrt{-\lambda_1 \eta \frac{\Phi^{cT} G_{,\bar{q}} \Omega}{\Phi^{cT} \hat{K} \Phi^c}}. \quad (3.129)$$

Im Fall der **symmetrisch instabilen Verzweigung** ($\lambda_1 = 0$) ergibt sich:

$$\zeta^{cl} = \left(-\frac{\eta \frac{\Phi^{cT} G_{,\bar{q}} \Omega}{\Phi^{cT} K \Phi^c}}{2\lambda_2} \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \lambda^{cl} = \lambda^c \left(1 - 3 \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda^c} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} \eta \frac{\Phi^{cT} G_{,\bar{q}} \Omega}{\lambda^c \Phi^{cT} K \Phi^c} \right)^{\frac{2}{3}} \right). \quad (3.130)$$

Hier zeigt sich die große praktische Bedeutung der Nachbeulanalyse. Unter Verwendung ihrer Ergebnisse kann, ohne den gesamten imperfekten Pfad zu kennen, eine maximal erreichbare Lasthöhe allein bei Vorgabe der Imperfektionsamplitude angegeben werden.

Werden die tatsächlichen Beanspruchungsgrenzen des Materials berücksichtigt, wird in vielen Fällen das maximal erreichbare Tragniveau noch unterhalb λ^{cl} liegen. Handelt es sich jedoch um eine Struktur mit einem großen elastischen Tragvermögen und einer kaum ausgeprägten plastischen Tragreserve, stellen die λ^{cl} - Werte nicht nur Bezugswerte, sondern tatsächliche Traglasten dar.

Bei den durchgeführten numerischen Analysen imperfekter Strukturen wurde die Methode der *Koiterischen Imperfektionssensitivität* genutzt, wobei teilweise eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen zu Pfadverläufen und evtl. Durchschlagslasten aus Pfadverfolgungen festzustellen war. In einigen Fällen traten jedoch folgende Schwierigkeiten auf:

1. Wurden größere Imperfektionsamplituden und/oder beliebige, nicht Φ^c - ähnliche Imperfektionsformen gewählt, war ein, von den bisherigen Darstellungen abweichendes Verhalten, zu beobachten. So kann eine große Imperfektionsamplitude dazu führen, dass auch im Falle einer **asymmetrischen Verzweigung**, unabhängig von der Imperfektionsrichtung, kein Stabilitätsproblem auftritt. Daneben traten, bei eigentlich stabilem Nachbeulverhalten nach Abb. 3.6 a) bzw. b), wo theoretisch kein Stabilitätsproblem zu erwarten ist ($\omega_1 > 0$), zum Teil Gleichgewichtsverzweigungen auf. Auch bei den oben beschriebenen Durchschlagscharakteristiken kann dieses Problem existieren, was dazu führen kann, dass die ermittelten Durchschlagslasten aus der *Koiterischen Imperfektionssensitivität* gar nicht erreicht werden können und damit die Tragfähigkeit gefährlich überschätzt wird.
2. Bei der Verfolgung der Gleichgewichtspfade imperfekter Strukturen war in einigen Fällen, insbesondere bei kleinen Imperfektionsamplituden, ein Überspringen kritischer Punkte und ein Wechsel auf andere Gleichgewichtspfade zu beobachten. Die Ursache liegt in der unmittelbaren Nachbarschaft verschiedener Gleichgewichtspfade. Bei gleichem λ existieren mehrere Gleichgewichtslagen, die sich nur durch geringfügige

Verformungsdifferenzen unterscheiden. Prädiktorschritt und Korrektiteration lassen sich nicht immer so präzise steuern, dass die Weiterverfolgung des speziellen Pfades gewährleistet werden kann.

Aufgrund dieser Sachverhalte erscheint eine Ermittlung eines imperfekten Pfades anhand eines Pfadverfolgungsalgorithmus' in manchen Fällen unausweichlich. Dann sollten unbedingt begleitende Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt werden, um evtl. Stabilitätsprobleme aufdecken und die Stabilität bzw. Instabilität der Gleichgewichtszustände überprüfen zu können. Daneben muß, anhand einiger markanter Freiheitsgrade, die Verformungsentwicklung genau verfolgt werden. So läßt sich ein ungewollter Pfadwechsel feststellen und, ausgehend von der letzten gültigen Gleichgewichtslösung, ein Neustart mit einer Änderung des Prädiktorschrittes vornehmen.

Aus 1. ergibt sich eine weitere Schlußfolgerung zur praktischen Bedeutung einer Imperfektionsvorgabe, wie sie in den aktuellen Regelwerken anzutreffen ist. Dort wird die Vorgabe einer maximalen Imperfektionsamplitude mit einzuhaltenden Herstellungstoleranzen begründet. Aus 1. wird jedoch deutlich, dass einer maximalen Amplitude eine darüber hinausgehende, stabilitätstheoretische Bedeutung zukommt, die in der Ingenieurpraxis nicht ausreichend beachtet wird.

Wird, um "auf der sicheren Seite zu sein", eine zu große Imperfektionsamplitude gewählt, kann es, im Falle von Verzweigungsproblemen mit $\lambda^c < \lambda^{cl}$, zu gravierenden Unterschätzungen der Tragfähigkeit kommen. Weitaus gefährlicher ist es jedoch, dass auch Überschätzungen der Tragfähigkeit möglich sind. Dies ist dann der Fall, wenn sich das Stabilitätstragverhalten aufgrund der Imperfektion qualitativ verändert: von einer Durchschlagscharakteristik hin zu einem unbegrenzt stabilem Verhalten.

3.11 Mehrfachverzweigungen

Im Falle einer Mehrfachverzweigung wird im kritischen Punkt beim Lastniveau λ^c die Singularitätsbedingung Gl.(2.19) nicht nur durch einen einzigen Singulärvektor, sondern durch m linear unabhängige Singulärvektoren Φ_i^c und deren Kombinationen erfüllt:

$$K^c \Phi_i^c = 0 \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.131)$$

In praktischen Problemstellungen wird dieses Zusammenwirken verschiedener Beulformen als gekoppelte Instabilität bezeichnet. In der Praxis können infolge einer Strukturoptimierung die Unterschiede zwischen den einzelnen kritischen Lastniveaus minimal werden, so dass hier näherungsweise ebenfalls Mehrfachverzweigungen vorliegen. Dies betrifft beispielsweise dünnwandige Stützen aus Stahl, die lokale Beulprobleme und globale Knickprobleme häufig auf unmittelbar benachbarten Lastniveaus aufweisen.

Das Zusammenwirken verschiedener Beulformen im Nachbeulbereich kann zum einen zu einer grundsätzlichen Veränderung des Stabilitätsverhaltens führen. Beispielsweise können mehrere Verzweigungsprobleme, die, einzeln betrachtet, stabil symmetrisch sind, im Falle einer Mehrfachverzweigung zu einem asymmetrischen Stabilitätsproblem führen. Zum anderen können vorhandene Stabilitätsprobleme verschärft werden. Sowohl experimentelle als auch theoretische Untersuchungen zu diesen Erscheinungen sind in der Literatur vielfältig dokumentiert [3, 30, 45]. Dabei konnte nachgewiesen werden, dass gerade die Kopplung verschiedener Stabilitätsprobleme zu teilweise starken Tragfähigkeitsverlusten führen kann. Dies stellte eine Optimierung in Frage, nach der die Struktur so konstruiert wird, dass sich kritische Lastniveaus möglichst hoch und bei ähnlichen Lasthöhen einstellen. Einer Anhebung der kritischen Last steht dann möglicherweise eine erheblich gefährlichere Imperfektionssensitivität gegenüber [59]. Eine Einordnung in verschiedene Problemklassen erfolgte in [14, 22].

Das Problem der Mehrfachverzweigungen bzw. der gekoppelten Instabilitäten stellt ein eigenes, aktuell nicht abgeschlossenes Forschungsgebiet dar, das hier nicht umfassend behandelt werden kann. Eine gute Übersicht über den Stand der Forschung zu gekoppelten Stabilitätsproblemen gibt [48]. Im Folgenden sollen einige ausgewählte Aspekte zur Problematik mehrfacher Verzweigungen angedeutet werden.

Für Mehrfachverzweigungen lassen sich die Methoden zur Untersuchung von Einfachverzweigungen erweitern. Die Analysen werden jedoch wesentlich komplexer und sind nur mit erheblichem Aufwand in der numerischen Rechnung zu realisieren.

Anstelle von Gl.(3.51) wird für sämtliche Tangenten $\dot{\mathbf{q}}$ im Verzweigungspunkt der folgende Ansatz verwendet:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{q}} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Phi_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.132)$$

Dieser Ansatz wird in Gl.(3.50) eingesetzt. Dies liefert nun, anstelle einer Verzweigungsgleichung wie bei einer einfachen Verzweigung, ein Gleichungssystem aus m Verzweigungsgleichungen. Das Gleichungssystem lautet, vgl. Gl.(3.54):

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m A_{ijk} \alpha_j \alpha_k + 2 \sum_{j=1}^m B_{ij} \alpha_j \dot{\lambda} + C_i \dot{\lambda}^2 = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.133)$$

mit

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= \Phi_i^T (K_{,q} \Phi_j) \Phi_k \\ B_{ij} &= \left[\Phi_i^T \hat{K} \Phi_j + \Phi_i^T (K_{,q} \Phi_j) \tilde{\mathbf{q}} \right] \\ C_i &= \left[\Phi_i^T (K_{,q} \tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}} + 2 \Phi_i^T \hat{K} \tilde{\mathbf{q}} - \Phi_i^T \hat{\mathbf{F}} \right] \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\text{für } 1 \leq j, k \leq m.$$

Für $m = 1$ erhält man wieder den Sonderfall einer einfachen Verzweigung nach Abschn. 3.6.3. Die Lösungen dieses Gleichungssystems, $\dot{\lambda}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, ergeben die Tangenten an den Primärpfad und an die maximal $2^m - 1$ möglichen sekundären Pfade.

Allein aus Gl.(3.133) lassen sich die gesuchten $m + 1$ skalaren Größen nicht ermitteln. Die fehlende Gleichung erhält man, indem die unbekannten Koeffizienten α_1 folgendermaßen normiert werden:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = 1. \quad (3.135)$$

Gl.(3.133) zusammen mit Gl.(3.135) erlaubt schließlich die Bestimmung von $\dot{\lambda}$ und der m Größen α_i .

Verschwinden alle A_{ijk} , handelt es sich um eine **symmetrische Verzweigung**. Im anderen Fall, wenn auch nur ein $A_{ijk} \neq 0$ ist, liegt eine **asymmetrische Verzweigung** vor. Es sind also alle möglichen Kombinationen der Singulärvektoren Φ_i in A_{ijk} zu untersuchen. Dafür wären die verwendeten Algorithmen `postbuckling-asymm.s` und `postbuckling-symm.s` aus Abschn. 3.8.6 bzw. 3.8.7 entsprechend zu erweitern.

Die lineare Approximation eines speziellen sekundären Pfades wäre im Falle einer **asymmetrischen Verzweigung**:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^s(s) &= \mathbf{q}^c + (\dot{\lambda}\tilde{\mathbf{q}} + \alpha_1\mathbf{\Phi}_1 + \alpha_2\mathbf{\Phi}_2 + \dots \alpha_m\mathbf{\Phi}_m)s \\ \lambda^s(s) &= \lambda^c + \dot{\lambda}s.\end{aligned}\tag{3.136}$$

Eine **asymmetrische Mehrfachverzweigung** ($\dot{\lambda} \neq 0$) tritt beispielsweise bei den in [44] untersuchten Trapezprofilblechen auf. Dort kommt es zu einer Kopplung zwischen einem globalen Gesamtbeulmode und mehreren lokalen Beulmodes. Aufgrund der asymmetrischen Verzweigung ist die Struktur sehr imperfektionssensitiv.

Wie bei einer einfachen Verzweigung können auch im Falle einer Mehrfachverzweigung Abschätzungen der maximalen Traglasten imperfekter Systeme auf der Basis der Nachbeulgrößen vorgenommen werden [34, 44, 55]. Ist die Imperfektionsform affin zu einer Kombination aus den m Singulärvektoren, führt diejenige Imperfektionsform zu den größten Tragfähigkeitseinbußen, die zum Sekundärpfad mit dem steilsten Abfall gehört. Für die Suche nach den maßgeblichen α_i 's wurden umfangreiche spezielle Verfahren entwickelt [53].

Gilt $A_{ijk} = 0$ für alle Kombinationen und damit $\dot{\lambda} = 0$, handelt es sich um eine **symmetrische Verzweigung**. In diesem Fall sind die Krümmungen der Sekundärpfade zu bestimmen. Dazu kann, analog Gl.(3.81), folgender Ansatz verwendet werden [55]:

$$\dot{\mathbf{q}}^s = \dot{\lambda}^s \tilde{\mathbf{q}} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_i \alpha_j \tilde{\mathbf{q}}_{ij}^\perp.\tag{3.137}$$

Die speziellen Lösungen $\tilde{\mathbf{q}}_{ij}^\perp$ ergeben sich analog Gl.(3.82) aus:

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{q}}_{ij}^\perp = -(\mathbf{K}_{,q} \mathbf{\Phi}_i) \mathbf{\Phi}_j \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad \mathbf{\Phi}_i^T \tilde{\mathbf{q}}_{ij}^\perp = 0.\tag{3.138}$$

Durch schrittweise Vormultiplikation von Gl.(3.45) mit den Singulärvektoren $\mathbf{\Phi}_i$, unter Beachtung der Anpassungen in Abschn. 3.8.1, entsteht ein Gleichungssystem zur Berechnung von $\dot{\lambda}^s$ und der α_i 's. Eine Entscheidung über die Art der Verzweigung, wie nach Gl.(3.83) bei einer einfachen Verzweigung, ist jedoch aufgrund der Komplexität der Ausdrücke nicht möglich. Dies kann hier nur anhand der konkreten Pfadparameter α_i geschehen.

Auch für diesen Fall lassen sich Imperfektionsgesetze ableiten, z.B. [55]. Handelt es sich um eine instabile symmetrische Verzweigung, lassen sich damit die maximalen Durchschlagslasten imperfekter Pfade bestimmen. Von besonderem Interesse ist der sekundäre Pfad, der die größte negative Krümmung aufweist, da die entsprechenden Imperfektionen am gefährlichsten sind.

Kapitel 4

Numerische Behandlung ausgewählter Stabilitätsprobleme

4.1 Einleitung

Ein wesentliches Anliegen der vorliegenden Arbeit ist es, die vorhandenen Möglichkeiten numerischer Stabilitätsanalysen nicht nur theoretisch darzustellen, sondern auch in ihrer konkreten praktischen Anwendung zu zeigen. Dazu wurde schon an verschiedenen Stellen auf die numerische Umsetzung der verschiedenen Methoden eingegangen. In diesem Kapitel werden die Ergebnisse durchgeführter numerischer, teilweise auch vergleichender analytischer Stabilitätsanalysen vorgestellt. Dies umfaßt die detaillierte Beschreibung von Abläufen, die ausführliche Diskussion von praktischen Fragestellungen und auftretenden Problemen im Verlauf der numerischen Analyse.

Die Berechnungen erfolgten an ausgewählten Strukturen, die zum Teil auch aus der Literatur bekannt sind und dort im Allgemeinen als Referenzobjekte für Weiterentwicklungen in den Methoden verwendet werden. Im Unterschied dazu stehen hier jedoch vor allem die Anschaulichkeit, die ingenieurmäßige Herangehensweise und der praktische Nutzen erweiterter numerischer Stabilitätsanalysen im Vordergrund.

Die Systeme wurden so ausgewählt, dass sie die in der Ingenieurpraxis auftretenden Problemgruppen Stabsysteme, Platten und Schalen mit einer zunehmenden Komplexität der Fragestellungen widerspiegeln. Es sei hier noch einmal betont, dass vor allem die Anwendung der verschiedenen Methoden, ihre Möglichkeiten und Grenzen im Vordergrund stehen. Das mechanische Verhalten der untersuchten Systeme ist im Wesentlichen bekannt.

4.2 Knicken ebener Rahmen - Fortsetzung

In Kapitel 2 wurde kurz auf eine praktische Problemstellung, das Stabilitätsverhalten eines symmetrischen Rechteckrahmens unter symmetrischer, gleichzeitiger Druck- und Biegebeanspruchung, eingegangen. Dieses Beispiel soll noch etwas eingehender untersucht werden. In Abb. 4.1 sind noch einmal das System und die 3 diskutierten Belastungsvarianten dargestellt.

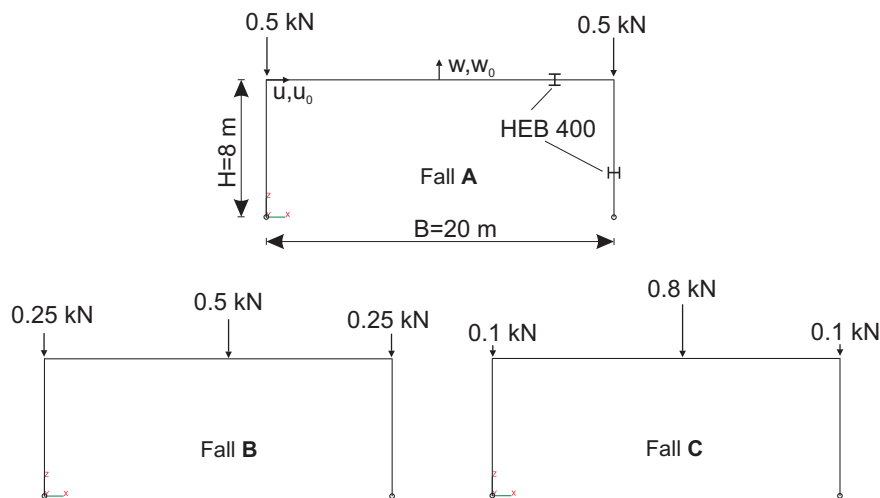


Abbildung 4.1: Rahmensystem mit verschiedenen Belastungsvarianten

In Abschn. 2.1 wurde schon darauf hingewiesen, dass es sich hier um ein Stabilitätsproblem aus der Gruppe der sog. Antimetrie - Symmetrie - Knickprobleme handelt. Für einzelne Stäbe ist dieses Problem hinreichend geklärt („Zimmermann - Stab“), für Stabsysteme wie im vorliegenden Fall sind Lösungen nur für einzelne Fälle bekannt [42].

Folgt man der Theorie zur Antimetrie - Symmetrie - Knickproblematik, ist für das behandelte Rahmenproblem zu erwarten, dass es in den Fällen **B** und **C** zu einem asymmetrischen Rahmenknicken (1. Eigenform des biegunsfreien Lastfalls **A**) aus einem symmetrischen Primärbiegezustand kommt. Die Gleichgewichtsverzweigung erfolgt dabei in Höhe des kritischen Lastniveaus aus Fall **A**. Gleichgewichtszustände oberhalb dieses Verzweigungspunktes sind in jedem Fall instabil.

Im ersten Schritt sind die kritischen Stabilitätspunkte für die 3 Lastfälle zu ermitteln. Die Ergebnisse aus linearen und nichtlinearen Stabilitätsanalysen mit dem Programmsystem **Stang** wurden schon in Abb. 2.2 dargestellt. Hier zeigten sich teilweise große Differenzen in den ermittelten kritischen Lastniveaus und den dazugehörigen Knickformen. Diese Unterschiede sind auf die Definition der verwendeten linearen Stabilitätsprobleme zurückzuführen.

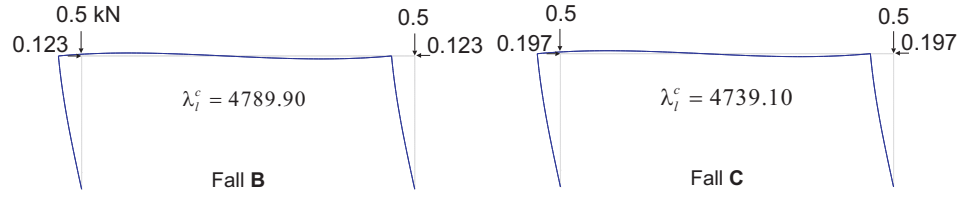


Abbildung 4.2: Geänderte Lastfälle **B** und **C**, λ_l^c und Φ_l^c

In Abschn. 3.3 wurde, ausgehend von einer Aufspaltung der Steifigkeitsmatrix in die Anteile \mathbf{K}_l , \mathbf{K}_u und \mathbf{K}_σ , die Aufstellung von verschiedenen verallgemeinerten Eigenproblemen zur Approximation kritischer Stabilitätszustände beschrieben.

Im vorliegenden Fall wurden für die linearen Stabilitätsanalysen Anfangsverschiebungs- und Anfangsspannungsanteile, \mathbf{K}_u bzw. \mathbf{K}_σ , berücksichtigt. Dies hatte im Fall der biegebeanspruchten Rahmensysteme einen maßgeblichen Einfluß auf das Ergebnis. Hier werden die Steifigkeitsverluste infolge \mathbf{K}_u offensichtlich stark überschätzt. In den ebenfalls durchgeführten linearen Stabilitätsanalysen mit ANSYS (Ergebnisse siehe Abschn. 2.1) geht nur \mathbf{K}_σ in das Eigenproblem ein, wodurch ausschließlich der Normalkraftzustand in den Rahmenstäben stabilitätsrelevant wird. Für das konkrete Beispiel bildet dieses Vorgehen jedoch offensichtlich besser die tatsächlichen Verhältnisse ab. Die kritischen Lastniveaus werden etwas unterschätzt, bei dem Rahmensystem mit starken Biegeeffekten (Fall **C**) wird allerdings auch eine asymmetrische Knickfigur ermittelt.

Die lineare Stabilitätsanalyse in ANSYS ist vergleichbar mit dem in [42] vorgeschlagenen Vorgehen, in den Fällen **B** und **C** die auftretenden horizontalen Auflagerkräfte als zusätzliche äußere Druckbelastung auf den Rahmenriegel entsprechend Abb. 4.2 anzusetzen. Dies führt im vorliegenden Fall zu einer sehr guten Übereinstimmung mit λ_{nl}^c . Der einzige Unterschied ist, dass auch im Fall **C** eine asymmetrische Knickfigur ermittelt wird.

Aufgrund der offensichtlichen Schwierigkeiten, für solche biegebeanspruchten Fälle wie **B** und **C** die kritischen Zustände linear approximieren zu können, wird sich für die weiteren Untersuchungen auf die Ergebnisse aus den durchgeführten nichtlinearen Stabilitätsanalysen, λ_{nl}^c und Φ_{nl}^c , bezogen.

In den Abb. 4.4 - 4.6 sind unter anderem die, im Zuge der nichtlinearen Stabilitätsanalysen ermittelten, primären Last - Verformungspfade für die Fälle **B** und **C** dargestellt. Folgendes ist hinsichtlich der Antimetrie - Symmetrie - Problematik festzustellen:

1. Im Fall **B** existiert die erwartete Gleichgewichtsverzweigung aus dem symmetrischen Biegezustand. Der Primärpfad konnte auch über den

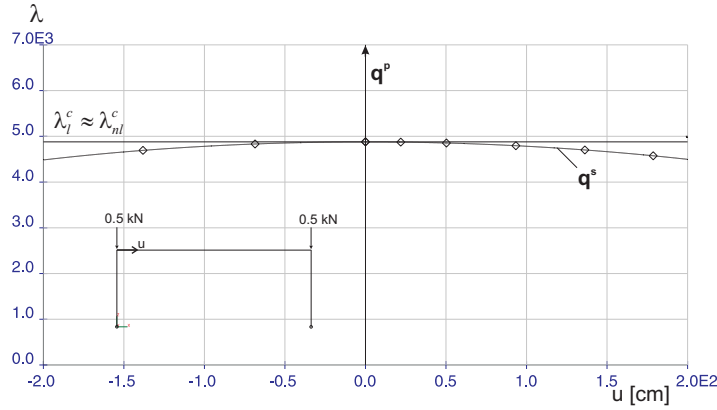


Abbildung 4.3: Sekundärer Pfad, Fall A

Verzweigungspunkt hinaus verfolgt werden. Die begleitende Stabilitätsanalyse ergab für diese instabilen Gleichgewichtszustände $\omega_1 < 0$.

2. Im Fall **C** kam es nicht zu einer Verzweigung aus dem symmetrischen Biegezustand, das heißt der Rahmen knickt nicht aus. Vielmehr handelt es sich hier bei λ_{nl}^c um einen Durchschlagspunkt. Der hinter λ_{nl}^c abfallende Pfad konnte problemlos weiterverfolgt werden, wobei es sich dabei um instabile Gleichgewichtszustände handelt. Die Verformungen waren in jedem berechneten Gleichgewichtspunkt vollkommen symmetrisch.
3. Im Unterschied zu ähnlichen, in [42] behandelten Fällen tritt im Fall **C** das Durchschlagsproblem nicht erst bei der Annäherung an das, zum symmetrischen Rahmenknicken gehörende Lastniveau $\lambda_{l,2}^c$, sondern weit darunter auf. $\lambda_{l,2}^c$ wird nach [42] am biegungsfreien Ersatzsystem nach Abb. 4.2 berechnet und wäre in diesem Fall $\lambda_{l,2}^c \approx 6\lambda_{l,1}^c$.

Bei den Verzweigungsproblemen der Fälle **A** und **B** handelt es sich um **instabil symmetrische** Verzweigungen. Dieses Ergebnis entsprechender Nachbeulanalysen wird durch den, durch einen Pfadwechsel gewonnenen und in Abb. 4.3 dargestellten, sekundären Pfad bestätigt.

Für den Fall **C** wurde bei der Ermittlung des Primärpfades begleitend nicht nur die Entwicklung des kleinsten, sondern auch des zweiten Standard Eigenwertes beobachtet. Dadurch konnte ein weiterer kritischer Punkt, $\lambda_{nl,2}^c$, identifiziert werden. Dabei ist $\lambda_{nl,2}^c \approx \lambda_{nl,1}^c$, so dass es sich hier um ein Problem mit einem doppelten kritischen Punkt handelt. Die zu $\lambda_{nl,2}^c$ gehörende Knickform $\Phi_{nl,2}^c$ ist antimetrisch.

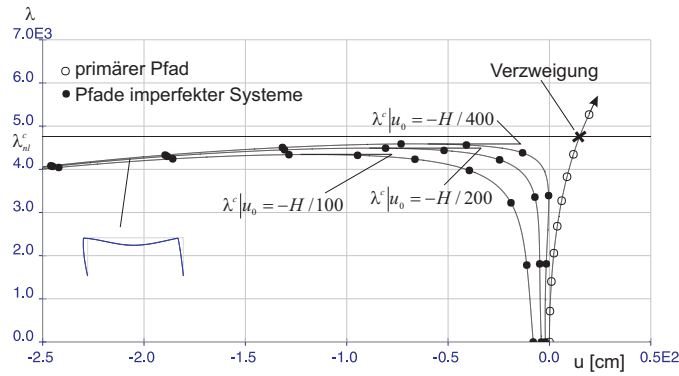


Abbildung 4.4: Fall **B**, Last - Verformungspfade imperfekter Systeme, Imperfektion: Φ_{nl}^c

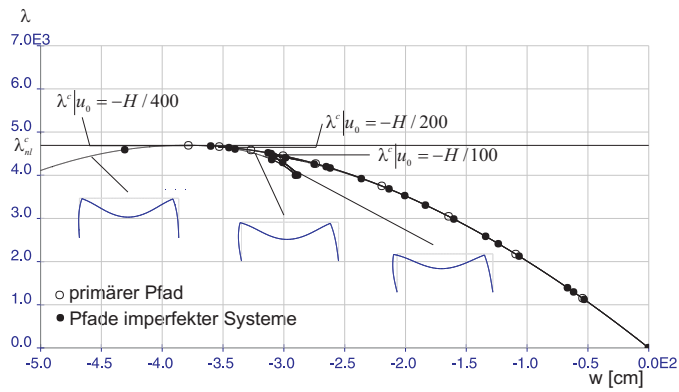


Abbildung 4.5: Fall **C**, Last - Verformungspfade imperfekter Systeme, Imperfektion: asymmetrisch - $\Phi_{nl,2}^c$

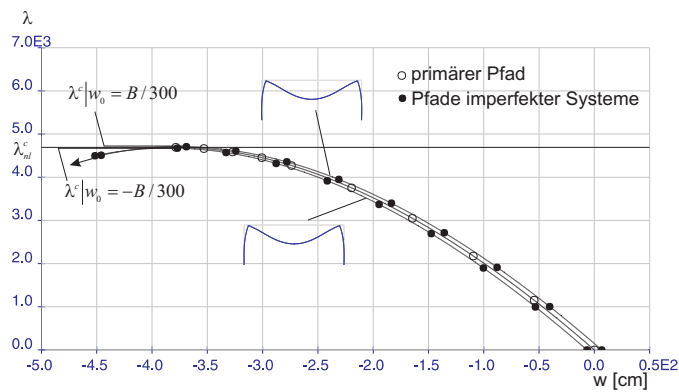


Abbildung 4.6: Fall **C**, Last - Verformungspfade imperfekter Systeme, Imperfektion: symmetrisch - $\Phi_{nl,1}^c$

Ausgewählte Ergebnisse von Imperfektionsanalysen für die Fälle **B** und **C** sind in den Abb. 4.4 - 4.6 zusammengefaßt. Für Fall **B** (wie auch für Fall **A**) ergibt sich aus der Art des Verzweigungsproblems unmittelbar, dass auch geometrisch imperfekte Systeme, mit einer Imperfektionsform ähnlich Φ_{nl}^c , stabilitätsgefährdet sind. Wie Abb. 4.4 zeigt, kann die Belastung maximal bis zum Durchschlagspunkt $\lambda^c < \lambda_{nl}^c$ gesteigert werden. Die zugehörige Verformungsfigur ist asymmetrisch.

Interessanter stellt sich der Fall **C** dar. Wie in Abb. 4.5 zu sehen ist, führen kleine geometrische Imperfektionen in asymmetrischer Form $\Phi_{nl,2}^c$ lediglich zu einer leichten Beeinflussung des primären symmetrischen Durchschlagsverhaltens. Erst bei größerer Imperfektionsamplitude wird das asymmetrische Verzweigungsproblem entscheidend angeregt. Dann kommt es zu einer Kopplung des primären symmetrischen Durchschlags- mit dem asymmetrischen Verzweigungsverhalten. Symmetrische Imperfektionen in Form von $\Phi_{nl,1}^c$ besitzen dagegen nur einen geringen Einfluß auf das Tragverhalten, siehe Abb. 4.5.

Daneben zeigt sich bei asymmetrischer Imperfektionsform, dass die Tragfähigkeitsverluste im Vergleich zu Fall **B** deutlich geringer ausfallen. Dies würde bedeuten, dass Fall **C** weniger imperfektionsempfindlich ist. Offensichtlich verändert die Kopplung mit dem symmetrischen Durchschlagsproblem die Steifigkeitsverhältnisse so, dass der tragfähigkeitsmindernde Einfluss des Verzweigungsproblems abgeschwächt wird.

4.3 Beulen einer Kreisplatte

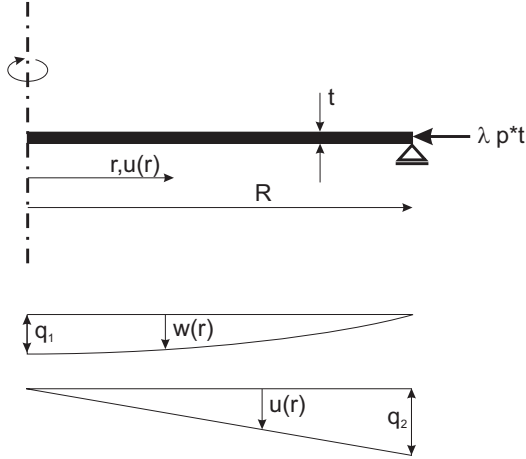


Abbildung 4.7: System und Ansatzfunktionen

Untersucht werden soll das Stabilitätsverhalten einer kreisförmigen Platte nach Abb. 4.7, die am Rand gelenkig gelagert und in Plattenebene frei verschieblich ist. Die Platte wird durch einen gleichförmigen radialen Randdruck in Plattenebene von $p \cdot t = -1.0$ beansprucht. Die Belastung ist richtungstreu und wird über den Lastparameter λ gesteigert. Auf eine konkrete Dimensionierung wird erst einmal verzichtet.

Der Verschiebungszustand der Kreisplatte setzt sich zusammen aus der radialen Verschiebung $u(r)$ und der Plattendurchbiegung $w(r)$. Das Materialverhalten sei unbeschränkt elastisch, die Dehn- und Biegesteifigkeit der Platte, C bzw. D , ergeben sich aus:

$$C = \frac{Et}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Für die kontinuierliche Struktur ist der Ausdruck für das elastische Potential bekannt. Er lautet [58]:

$$\begin{aligned} \Pi = & \pi D \int_0^R \left[\ddot{w}^2 + 2\nu \ddot{w} \frac{\dot{w}}{r} + \left(\frac{\dot{w}}{r} \right)^2 \right] r dr \\ & + \pi C \int_0^R \left[\left(\dot{u} + \frac{1}{2} \dot{w}^2 \right)^2 + 2\nu \left(\dot{u} + \frac{1}{2} \dot{w}^2 \right) \frac{u}{r} + \left(\frac{u}{r} \right)^2 \right] r dr \\ & - 2\pi R \lambda p t u(R). \end{aligned}$$

4.3.1 Diskreter Potentialausdruck

Um einen diskreten Potentialausdruck entsprechend Gl.(2.2) zu erhalten, werden die folgenden, in Abb. 4.7 dargestellten Verschiebungsansätze eingeführt:

$$w(r) = q_1 \cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right), \quad u(r) = \frac{r}{R} q_2.$$

Die generalisierten Koordinaten lauten somit:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Hier sind q_1 und q_2 die Durchbiegung in Plattenmitte bzw. die Verschiebung am Plattenrand entlang des Umfangs. Im Unterschied zur FEM besitzen die generalisierten Koordinaten hier nicht die Bedeutung von Knotenfreiheitsgraden. Somit lautet der diskrete Potentialausdruck nach Gl.(2.4):

$$\Pi(\mathbf{q}, \lambda) = A_2 q_2 + \frac{1}{2} (A_{11} q_1^2 + A_{22} q_2^2) + \frac{1}{6} (3A_{112}) q_1^2 q_2 + \frac{1}{24} A_{1111} q_1^4$$

mit:

$$\begin{aligned} A_2 &= -2\pi R \lambda = \acute{A}_2 \lambda \\ A_{11} &= \frac{1}{2} \pi^3 (1.191 + \nu) \frac{D}{R^2} \\ A_{22} &= 2C \pi (1 + \nu) \\ A_{112} &= 5.4466 \frac{C}{R} (1 + \nu) \\ A_{1111} &= 33.144 \frac{C}{R^2}. \end{aligned}$$

Alle anderen Koeffizienten ($A_{12}, A_{111}, A_{122}, \dots$) verschwinden. $-2\pi R = \acute{A}_2$ wird allein aus Gründen der Vereinfachung eingeführt.

4.3.2 Gleichgewicht, primärer Pfad, kritischer Punkt

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten in diskreter - Formulierung nach Gl.(2.6):

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) - \lambda \mathbf{F} = \begin{bmatrix} A_{11}q_1 + A_{112}q_1q_2 + \frac{1}{6}A_{1111}q_1^3 \\ A_{22}q_2 + \frac{1}{2}A_{112}q_1^2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{A}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

In Analogie zur FEM sind \mathbf{R} die nichtlinear von den Verschiebungen abhängenden Rückstellkräfte, \mathbf{F} wäre der konstante Lastvektor. Die Gleichgewichtsbedingungen werden unter anderem durch folgenden, linearen primären Gleichgewichtspfad erfüllt:

$$\mathbf{q}^p(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\dot{A}_2}{A_{22}}\lambda \end{pmatrix}.$$

Die „Steifigkeitsmatrix“ nach Gl.(2.13) lautet:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{112}q_2 + \frac{1}{2}A_{1111}q_1^2 & A_{112}q_1 \\ A_{112}q_1 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Wird der Primärpfad eingesetzt, lautet die Singularitätsbedingung:

$$\mathbf{K}(\lambda)\Phi = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{112}\frac{\dot{A}_2}{A_{22}}\lambda & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \Phi = \mathbf{0}.$$

Aus der Auflösung der Singularitätsbedingung ergibt sich der kritische Stabilitätspunkt zu:

$$\lambda^c = -\frac{A_{11}A_{22}}{A_{112}\dot{A}_2}, \quad \mathbf{q}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{A_{11}}{A_{112}} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beim kritischen Punkt handelt es sich um einen Verzweigungspunkt, da:

$$\Phi^T \mathbf{F} = 0.$$

4.3.3 Koitersche Nachbeulanalyse

Die Voraussetzungen für eine Koitersche Nachbeulanalyse nach Abschn. 3.4 sind erfüllt: es handelt sich um einen Verzweigungspunkt und die Tangente an den primären Gleichgewichtspfad in „c“ ist bekannt.

Da nur wenige von 0 verschiedene Terme vorhanden sind, reduziert sich der allgemeine Ausdruck für die Potentialapproximation nach Gl.(3.18) auf:

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{q}^p + \mathbf{u}, \lambda) &= \Pi(\mathbf{q}^p(\lambda^c), \lambda^c) + (\lambda - \lambda^c) \hat{\Pi} \\
&+ \Pi_2(\bar{\mathbf{u}}) \\
&+ (\lambda - \lambda^c) \left[\alpha^2 \hat{\Pi}_2(\Phi) + \alpha \hat{\Pi}_{11}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \hat{\Pi}_2(\bar{\mathbf{u}}) \right] \\
&+ \alpha^2 \Pi_{21}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha \Pi_{12}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \Pi_3(\bar{\mathbf{u}}) \\
&+ \alpha^4 \Pi_4(\Phi) + \alpha^3 \Pi_{31}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha^2 \Pi_{22}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) \\
&+ \alpha \Pi_{13}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \Pi_4(\bar{\mathbf{u}}).
\end{aligned}$$

Die Terme lauten im einzelnen:

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi} &= \frac{\dot{A}_2 A_{11}}{A_{112}} & \Pi_4(\bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{24} A_{1111} \bar{u}_1^4 \\
\Pi_2(\bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2} A_{22} \bar{u}_2^2 & \Pi_{31}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{6} A_{1111} \bar{u}_1 \\
\hat{\Pi}_2(\Phi) &= \frac{1}{2} \frac{A_{112} \dot{A}_2}{A_{22}} & \Pi_{22}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{4} A_{1111} \bar{u}_1^2 \\
\hat{\Pi}_{11}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) &= \frac{A_{112} \dot{A}_2}{A_{22}} \bar{u}_1 & \Pi_{13}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{6} A_{1111} \bar{u}_1^3 \\
\hat{\Pi}_2(\bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2} \frac{A_{112} \dot{A}_2}{A_{22}} \bar{u}_1^2 & \Pi_4(\bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{24} A_{1111} \bar{u}_1^4 \\
\Pi_{21}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2} A_{112} \bar{u}_2 \\
\Pi_{12}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) &= A_{112} \bar{u}_1 \bar{u}_2 \\
\Pi_3(\bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2} A_{112} \bar{u}_1^2 \bar{u}_2
\end{aligned}$$

Die Terme Π_1 , $\hat{\Pi}_1$ und $\hat{\Pi}_1$ aus Gl.(3.18) tauchen hier nicht auf, da es sich dabei um Produkte mit den verschwindenden Gleichgewichtsbedingungen bzw. deren Ableitungen nach λ entlang des primären Pfades handelt. Im konkreten Fall gilt - neben $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ - nach Gl.(3.22):

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{G}} &= \left(\frac{d\mathbf{G}}{d\lambda} \right) = \mathbf{G}_{,q} \hat{\mathbf{q}}^p + \hat{\mathbf{G}} = \mathbf{K} \hat{\mathbf{q}}^p - \mathbf{F} = \mathbf{0} \\
\hat{\hat{\mathbf{G}}} &= \left(\frac{d^2 \mathbf{G}}{d\lambda^2} \right) = \mathbf{G}_{,qq} \hat{\mathbf{q}}^p + (\mathbf{G}_{,q} \hat{\mathbf{q}}^p) \hat{\mathbf{q}}^p = \mathbf{K} \hat{\mathbf{q}}^p + (\mathbf{K}_{,q} \hat{\mathbf{q}}^p) \hat{\mathbf{q}}^p = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Alle Ableitungen sind im Verzweigungspunkt aufzustellen, die Größen $\hat{\mathbf{q}}^p$ und $\hat{\hat{\mathbf{q}}}^p$ stellen die Tangente bzw. die Krümmung des primären Pfades in „c“ dar. Sie lauten für das vorliegende Beispiel:

$$\hat{\mathbf{q}}^p = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\dot{A}_2}{A_{22}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\hat{\mathbf{q}}}^p = \mathbf{0}.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für den benachbarten Gleichgewichtspunkt auf dem sekundären Pfad lauten nach Gl.(3.20):

$$\begin{aligned} G(\bar{\mathbf{u}}, \alpha, \lambda) &= \mathbf{K}^c \bar{\mathbf{u}} \\ &+ (\lambda - \lambda^c) \left[\alpha \hat{\mathbf{K}}^c \Phi + \hat{\mathbf{K}}^c \bar{\mathbf{u}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \alpha^2 (\mathbf{K}_{,q} \Phi)^c \Phi + \alpha (\mathbf{K}_{,q} \Phi)^c \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} (\mathbf{K}_{,q} \bar{\mathbf{u}})^c \bar{\mathbf{u}} \\ &+ \frac{1}{6} \alpha^3 (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi)^c \Phi + \frac{1}{2} \alpha^2 (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi)^c \bar{\mathbf{u}} \\ &+ \frac{1}{2} \alpha (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \bar{\mathbf{u}})^c \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{6} (\mathbf{K}_{,qq} \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}})^c \bar{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\alpha \mathbf{K} \Phi$ verschwindet aufgrund der Singularität in „c“. Die Steifigkeitsmatrix im Verzweigungspunkt und ihre Ableitungen nach λ bzw. \mathbf{q} lauten entsprechend Gl.(2.14) bzw. Gl.(2.15) im Einzelnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{K}_{,q} \Phi)^c = \begin{bmatrix} 0 & A_{112} \\ A_{112} & 0 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{K}_{,q} \bar{\mathbf{u}})^c &= \begin{bmatrix} A_{112} \bar{u}_2 & A_{112} \bar{u}_1 \\ A_{112} \bar{u}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \Phi)^c = \begin{bmatrix} A_{1111} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{K}_{,qq} \Phi \bar{\mathbf{u}})^c &= \begin{bmatrix} A_{1111} \bar{u}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{K}_{,qq} \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}})^c = \begin{bmatrix} A_{1111} \bar{u}_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Ableitung $\hat{\mathbf{K}}^c$ wird entsprechend Gl.(3.78) ersetzt durch:

$$\hat{\mathbf{K}}^c = (\mathbf{K}_{,q} \hat{\mathbf{q}}^p)^c.$$

Ausführlich bedeutet dies:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_1} &= \begin{bmatrix} A_{1111}q_1 & A_{112} \\ A_{112} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_1} \hat{\mathbf{q}}^p = \begin{pmatrix} \frac{A_{112}\dot{A}_2}{A_{22}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_2} &= \begin{bmatrix} A_{112} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_2} \hat{\mathbf{q}}^p = (\mathbf{0}) \\ \rightarrow \hat{\mathbf{K}}^c &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_1} \hat{\mathbf{q}}^p \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_2} \hat{\mathbf{q}}^p \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{112}\dot{A}_2}{A_{22}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Damit lauten die nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen nach Gl.(3.20) schließlich:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{u}}, \alpha, \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 \\ A_{22}\bar{u}_2 \end{pmatrix} \\ &+ (\lambda - \lambda^c) \left[\alpha \begin{pmatrix} \frac{A_{112}\dot{A}_2}{A_{22}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{A_{112}\dot{A}_2}{A_{22}}\bar{u}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &+ \frac{1}{2}\alpha^2 \begin{pmatrix} 0 \\ A_{112} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} A_{112}\bar{u}_2 \\ A_{112}\bar{u}_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2A_{112}\bar{u}_1\bar{u}_2 \\ A_{112}\bar{u}_1^2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{6}\alpha^3 \begin{pmatrix} A_{1111} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\alpha^2 \begin{pmatrix} A_{1111}\bar{u}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2}\alpha \begin{pmatrix} A_{1111}\bar{u}_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} A_{1111}\bar{u}_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Die Auflösung nach $\bar{\mathbf{u}}$ ist hier unkompliziert. Die zusätzliche Bedingung ist $\bar{\mathbf{u}} \perp \Phi$. Damit lautet $\bar{\mathbf{u}}$:

$$\bar{\mathbf{u}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha^2 \frac{A_{112}}{A_{22}} \end{pmatrix}.$$

Eine Linearisierung der Gleichgewichtsbedingungen, wie in Abschn. 3.4 beschrieben, würde hier folgendes Gleichungssystem ergeben:

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{u}}, \alpha, \lambda)_{\text{lin.}} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} + (\lambda - \lambda^c)\alpha \hat{\mathbf{K}}\Phi + \frac{1}{2}\alpha^2 (\mathbf{K}_{,q}\Phi) \Phi + \frac{1}{6}\alpha^3 (\mathbf{K}_{,qq}\Phi\Phi) \Phi = \mathbf{0}.$$

Wegen $\bar{u}_1 = 0$ ergibt sich in diesem speziellen Beispiel trotz der Linearisierung wieder die schon bekannte Lösung für $\bar{\mathbf{u}}$. Unter Verwendung der Lösung $\bar{\mathbf{u}}(\alpha)$ wird Gl.(3.23) ausgewertet. Schließlich ergeben sich die Lösungen $\alpha(\lambda)$ zu:

$$\alpha(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6}\sqrt{(A_{1111}A_{22} - 3A_{112}^2)(-\lambda + \lambda^c)A_{112}\dot{A}_2}}{(A_{1111}A_{22} - 3A_{112}^2)} \\ -\frac{\sqrt{6}\sqrt{(A_{1111}A_{22} - 3A_{112}^2)(-\lambda + \lambda^c)A_{112}\dot{A}_2}}{(A_{1111}A_{22} - 3A_{112}^2)} \end{bmatrix}.$$

Die erste Lösung führt auf den primären, die beiden anderen Lösungen auf den sekundären Pfad. Der sekundäre Pfad lautet in Abhängigkeit von λ und mit Bezug auf den primären Pfad nach Gl.(3.24):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^s(\lambda) &= \mathbf{q}^c + \alpha(\lambda)\Phi + \bar{\mathbf{u}}(\alpha(\lambda)) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{A_{11}}{A_{112}} \end{pmatrix} + \alpha(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha(\lambda)^2 \frac{A_{112}}{A_{22}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Durchbiegung der Kreisplatte entlang des sekundären Pfades wird damit allein durch den Singulärvektor abgebildet, $\bar{\mathbf{u}}$ enthält die Änderungen der Verschiebungen in Plattenebene beim Übergang vom Primär- auf den Sekundärpfad bei gleichem Lastniveau.

Zur endgültigen Auswertung wird das Lastniveau λ vorgegeben, anschließend $\alpha(\lambda)$ bestimmt und schließlich \mathbf{q}^s punktweise ermittelt.

Koiterische Nachbeulanalyse - Approximation

Zum Vergleich wird noch die quadratische Approximation für den sekundären Pfad nach Abschn. 3.5 ermittelt. Es gilt:

$$\Phi^T (\mathbf{K}_{,q}\Phi) \Phi = A = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0.$$

Das Verformungsinkrement \mathbf{u}_2 wird aus dem singulären Gleichungssystem Gl.(3.33) unter Hinzufügen der Nebenbedingung $\mathbf{u}_2 \perp \Phi$ ermittelt:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{A_{112}}{A_{22}} \end{pmatrix}.$$

Der Nachbeulparameter λ_2 lautet nach Gl.(3.32):

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{2} \frac{A_{112}}{\dot{A}_2} - \frac{1}{6} \frac{A_{1111}A_{22}}{A_{112}\dot{A}_2} \right).$$

Bei der Berechnung von λ_2 wurde die im Nenner auftretende Ableitung $\hat{\mathbf{K}}$ wieder durch Gl.(3.78) ersetzt. Die quadratische Approximation des Sekundärpfades lautet nach Gl.(3.34) somit:

$$\begin{aligned} \lambda^s &= \lambda^c + \lambda_2 \zeta^2 \\ \mathbf{q}^s &= \mathbf{q}^c + \mathbf{\Phi} \zeta + \mathbf{u}_2 \zeta^2. \end{aligned}$$

4.3.4 Verallgemeinerte Nachbeulanalyse

Auch wenn grundsätzliche Aussagen zum Stabilitätsverhalten der Kreisplatte schon getroffen werden könnten, soll an dieser Stelle zum Vergleich eine systematische Stabilitätsanalyse nach Abschn. 3.6 erfolgen.

Zuerst wird der kritische Punkt klassifiziert und anschließend eine Approximation für den sekundären Pfad ab dem kritischen Punkt ermittelt.

Bei dem kritischen Punkt handelt es sich, wie schon bekannt, um einen Verzweigungspunkt. Es gilt Gl.(3.48):

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{A}_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Zur Bestimmung der Tangenten an den Primär- bzw. Sekundärpfad ist die spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}$ aus Gl.(3.52) zu ermitteln. Als Nebenbedingung wird $\tilde{\mathbf{q}} \perp \mathbf{\Phi}$ gewählt. Damit ergibt sich hier der Sonderfall:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}^\perp = \hat{\mathbf{q}}^p = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\dot{A}_2}{A_{22}} \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten der Verzweigungsgleichung ergeben sich aus Gl.(3.80) anstelle von Gl.(3.55), da, wie in einer numerischen Analyse, die Ableitungen $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{F}}$ nicht existieren.

Die Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & A_{112} \\ A_{112} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & A_{112} \\ A_{112} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\dot{A}_2}{A_{22}} \end{pmatrix} = \frac{A_{112}\dot{A}_2}{A_{22}} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{A_{112}\dot{A}_2}{A_{22}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\dot{A}_2}{A_{22}} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Wegen $\tilde{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^p$ ergibt sich hier der Spezialfall $C = 0$ nach Abschn. 3.8.2. Da $A = 0$ ist, gilt:

$$\dot{\lambda}^s = 0.$$

Damit handelt es sich hier um eine **symmetrische Verzweigung**. Die Tangenten an die Gleichgewichtspfade lauten:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^p &\in \mathbf{R} & \dot{q}^p &= \dot{\lambda}^p \hat{\mathbf{q}}^p \\ \dot{\lambda}^s &= 0 & \dot{q}^s &= \alpha^s \Phi. \end{aligned}$$

Für die weitere Rechnung sind zwei Normierungsbedingungen für den Primär- bzw. Sekundärpfad festzulegen, z.B.:

$$\begin{aligned} \textbf{Primärpfad:} \quad s &= \lambda(s) - \lambda^c \rightarrow \dot{\lambda} = 1.0, \dot{\lambda}^s = 0, \dots \\ \textbf{Sekundärpfad:} \quad s &= q_1(s) - q_1^c \rightarrow \dot{q}_1 = 1.0, \dot{q}_1^s = 0, \dots \end{aligned}$$

Aus der Normierung für den Sekundärpfad folgt unmittelbar $\alpha = 1.0$. Die Krümmung des Sekundärpfades wird aus Gl.(3.63) und Gl.(3.64) berechnet. Dafür werden folgende Ausdrücke benötigt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{,q}\Phi)\Phi &= \begin{bmatrix} 0 & A_{112} \\ A_{112} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{112} \end{pmatrix} \\ \Phi^T(\mathbf{K}_{,qq}\Phi\Phi)\Phi &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{1111} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{1111}. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem zur Berechnung der quadratischen Inkremente lautet ausführlich ($\dot{\mathbf{K}} = 0$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & -\dot{A}_2 \\ 0 & 3A_{112} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -A_{112} \\ -A_{1111} \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem ist regulär und wird nach $\dot{\mathbf{q}}$ und $\dot{\lambda}$ aufgelöst. Die Lösung lautet:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \frac{A_{1111}}{A_{112}} \end{pmatrix}, \quad \dot{\lambda} = \frac{A_{112}}{\dot{A}_2} - \frac{1}{3} \frac{A_{1111} A_{22}}{A_{112} \dot{A}_2}.$$

Mit Blick auf die numerische Analyse ist dieses Vorgehen jedoch problematisch, da die Symmetrie der Koeffizientenmatrix verlorengeht. Besser geeignet ist deshalb der in Abschn. 3.8.1 beschriebene Weg, wo zuerst die spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ ermittelt wird. Sie ergibt sich nach Gl.(3.82) durch:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^\perp \\ \tilde{q}_2^\perp \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -A_{112} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Auflösung des singulären Gleichungssystem wurde hier die erste Methode aus Abschn. 3.8.3 verwendet. Die Lösung für $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ lautet:

$$\tilde{\mathbf{q}}^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{A_{112}}{A_{22}} \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung von $\dot{\lambda}$ nach Gl.(3.83) sind zusätzlich die Koeffizienten D und E zu bestimmen:

$$\begin{aligned} D &= A_{1111} \text{ (s.o.)} \\ E &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & A_{112} \\ A_{112} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{A_{112}}{A_{22}} \end{pmatrix} = -\frac{A_{112}^2}{A_{22}}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich schließlich wieder die schon bekannten Ausdrücke (mit $\alpha = 1.0$):

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{A_{112}}{\dot{A}_2} - \frac{1}{3} \frac{A_{1111} A_{22}}{A_{112} \dot{A}_2} \\ \dot{\mathbf{q}} &= \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \frac{A_{1111}}{A_{112}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vergleicht man die Ergebnisse aus Koiterscher und Verallgemeinerter Nachbeulanalyse miteinander, werden folgende Zusammenhänge aus Abschn. 3.7 bestätigt:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \dot{\lambda} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_2 \neq \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^\perp.$$

4.3.5 Parameterbeispiel

Für ein konkretes Beispiel werden folgende Parameter gewählt:

$$R = 10 \text{ cm}, \quad \nu = 0.3, \quad E = 21000 \text{ kN/cm}^2, \quad t = 1.0 \text{ cm}.$$

Der kritische Lastparameter, die Verschiebungen am kritischen Punkt und der Singulärvektor lauten:

$$\lambda^c = 81.615, \quad \mathbf{q}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.027205 \end{pmatrix} \text{ cm}, \quad \Phi^c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen $\alpha(\lambda)$ aus der Koiterschen Nachbeulanalyse lauten für den Sekundärpfad:

$$\alpha(\lambda) = \begin{pmatrix} 0.0021932 \sqrt{2000\lambda - 163198} \\ -0.0021932 \sqrt{2000\lambda - 163198} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich der Verschiebungszustand für den Sekundärpfad in Abhängigkeit von λ und mit $\bar{\mathbf{u}}$ zu:

$$\mathbf{q}^s(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.027205 \end{pmatrix} + \alpha(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha(\lambda)^2 0.043342 \end{pmatrix}.$$

Für die Approximation im Rahmen der Koiterschen Nachbeulanalyse lauten die quadratischen Zuwächse:

$$\lambda_2 = 104.02 \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.043342 \end{pmatrix}.$$

Die quadratischen Inkremente der Verallgemeinerten Nachbeulanalyse sind:

$$\dot{\lambda} = 208.04 > 0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.156032 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\dot{\lambda} > 0$ handelt es sich um eine **symmetrisch stabile Verzweigung**.

Ist der Verschiebungszustand auf dem Sekundärpfad, beispielsweise beim Lastniveau $\lambda = 1.2\lambda^c$ gesucht, ergeben sich nach den beiden Vorgehensweisen nur geringe Unterschiede:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^s &= \begin{pmatrix} 0.396466 \\ -0.034018 \end{pmatrix} && \text{nach Koiterscher NB - Analyse} \\ \mathbf{q}^s &= \begin{pmatrix} 0.396466 \\ -0.037835 \end{pmatrix} && \text{nach Verallgemeinerter NB - Analyse.} \end{aligned}$$

Numerische Stabilitätsanalyse

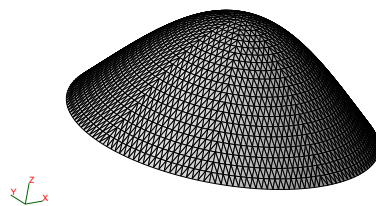


Abbildung 4.8: Φ^c

Zum Vergleich wurde auch eine numerische Stabilitätsanalyse durchgeführt. Dazu wurde die Kreisplatte mit 3528 geometrisch nichtlinearen FE - Elementen vom Typ GEOSHELL3N [55] diskretisiert. Das FE - Modell besaß insgesamt 9073 globale Knotenfreiheitsgrade. Als Belastung wurde -1.0 kN pro Knoten in radialer Richtung auf die Randknoten aufgebracht, woraus

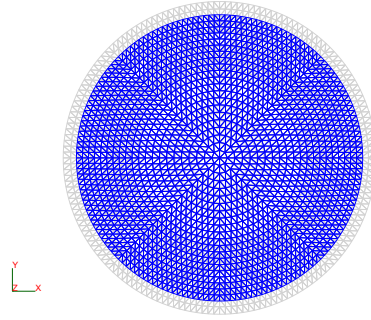


Abbildung 4.9: $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$

eine konstante Radial- und Tangentialdruckspannung in Plattenebene von $\sigma_0 = -2.6743 \text{ kN/cm}^2$ resultierte. Der erste Eigenwert einer Anfangsstabilitätsanalyse lag bei $\lambda^c = 30.161$. Die kritische Beulspannung liegt somit bei:

$$\sigma^c = \sigma_0 \lambda^c = -80.66 \text{ kN/cm}^2.$$

Den zugehörigen Beulvektor Φ^c zeigt Abb. 4.8. Er wurde so normiert, daß für die Durchbiegung in Plattenmitte $w_M = \Phi_M = 1.0$ gilt. Der kritische Punkt ist ein Verzweigungspunkt da:

$$\Phi^T \mathbf{F} = -4.6297e - 14 \approx 0.$$

Im weiteren wurden die Stabilitätskoeffizienten A,B und C nach Gl.(3.80) durch numerische Differentiation ermittelt:

$$A = 6.78077e - 10, \quad B = -14.0979, \quad C = -4.97807e - 17.$$

Da als spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}$ die Tangente an den primären Pfad $\hat{\mathbf{q}}^p$ verwendet wurde, folgt $C \approx 0$. Wegen $A \approx 0$ ist die Verzweigung **symmetrisch** und $\lambda^s \approx 0$. Zur Berechnung der quadratischen Pfadinkremente wurde der Algorithmus **postbuckling-symm.s** aus Abschn. 3.8.7 verwendet. Die spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ ist in 10-facher Überhöhung über der unverformten Struktur in Abb. 4.9 dargestellt. Diese Verschiebungskorrektur enthält nur Komponenten in Plattenebene.

Die Koeffizienten D und E nach Gl.(3.84) lauten:

$$D = 6909.51, \quad E = -2084.47.$$

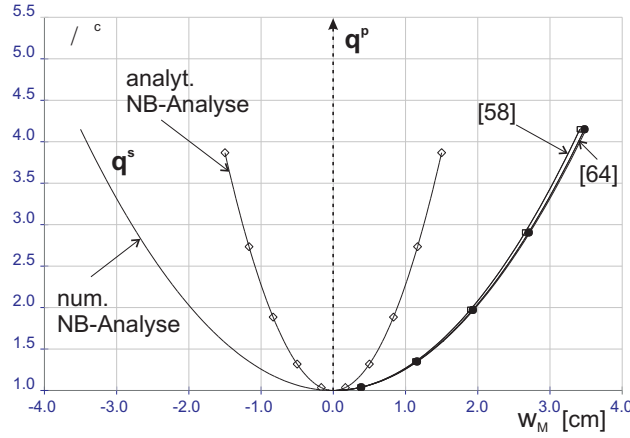


Abbildung 4.10: Sekundärer Pfad - Vergleich numerischer und analytischer Lösungen

Damit folgt schließlich für den quadratischen Nachbarparameter $\dot{\lambda}^s$ nach Gl.(3.83) ($\alpha = 1.0$):

$$\dot{\lambda}^s = 15.512 > 0.$$

Somit wird durch die numerische Stabilitätsanalyse bestätigt, dass es sich hier um eine symmetrisch stabile Verzweigung handelt.

Die quadratische Näherung für den sekundären Pfad in Abhängigkeit von der Durchbiegung in Plattenmitte w_M lautet:

$$\begin{aligned} \lambda^s &= 30.161 + 7.756 w_M^2 \\ \mathbf{q}^s &= \mathbf{q}^c + \mathbf{\Phi}^c w_M^2 + \frac{1}{2} \left(\dot{\lambda}^s \hat{\mathbf{q}}^p + \tilde{\mathbf{q}}^\perp \right) w_M^2. \end{aligned}$$

Den sekundären Pfad als Projektion auf die $\lambda - w_M$ -Ebene zeigt Abb. 4.10. Neben dem Ergebnis aus der numerischen Stabilitätsanalyse sind die analytische Lösung nach der Verallgemeinerten Stabilitätsanalyse und ebenfalls analytische Referenzlösungen aus [58] und [64] dargestellt. Die numerische und die analytischen Lösungen aus [58] bzw. [64] stimmen sehr gut überein, woraus zu schließen ist, dass diese Lösungen den tatsächlichen Verlauf gut abbilden. Dagegen weicht die ermittelte analytische Lösung stark von diesen Lösungen ab. Die Art des Verzweigungsproblems wird zwar korrekt wiedergegeben, der Pfadverlauf jedoch nur unmittelbar bei „c“ zufriedenstellend approximiert. Die Ursache für diese Abweichungen sind in den verwendeten ungenauen Verformungsansätzen zu sehen. In den angegebenen Referenzlösungen wurden höherwertige Ansätze zur Beschreibung der Biegefläche verwendet.

4.4 Beulen von rechteckigen Platten

Das Beulen von rechteckigen, in ihrer Ebene druck- bzw. schubbeanspruchten Platten, stellt eines der wichtigsten Stabilitätsprobleme des konstruktiven Stahlbaus dar. Der baupraktische Beulsicherheitsnachweis erfolgt im Allgemeinen anhand halbempirischer Nachweiskonzepte, z.B. [39], in das die kritischen Beulspannungen des perfekten Systems - σ_{xPi} , σ_{yPi} , τ_{Pi} für Druck- bzw. Schubbeanspruchung und σ_{Ki} für den Sonderfall des knickstabähnlichen Verhaltens - eingehen. Die Abminderung der kritischen Beulspannungen auf das tatsächliche Tragspannungsniveau erfolgt durch empirische Abminderungsfaktoren. Überkritische Tragreserven werden im Beulsicherheitsnachweis nicht explizit ermittelt, sondern indirekt über das Konzept der „wirksamen Breiten“ berücksichtigt [42].

Die mechanischen Zusammenhänge des Plattenbeulens sind im Rahmen der linearen bzw. nichtlinearen Beultheorie auf analytischem Weg umfassend geklärt [42, 64]. Geschlossene Lösungen lassen sich jedoch nur für den Fall einer konstanten Druckbeanspruchung angeben. Im Fall von Biege- und Schub- oder kombinierten Spannungen werden analytische Näherungsverfahren bzw. FE - Berechnungen mit speziellen Programmen, wie z.B. [20], durchgeführt. Kritische Beulspannungen wurden für eine Vielzahl von Plattenbeulfällen ermittelt und stehen in aufbereiteter Form zur Verfügung [25, 26, 32].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden numerische Plattenbeulanalysen mit den folgenden Zielstellungen durchgeführt:

1. Untersuchung der Auswirkungen unterschiedlicher Randbedingungen, Plattenschlankheiten, Plattengeometrien und Belastungen auf das Stabilitätsverhalten, insbesondere auf den Nachbeulbereich.
2. Direkte Ermittlung überkritischer Tragreserven auf der Basis sekundärer Gleichgewichtspfade.
3. Vergleich der Ergebnisse numerischer Stabilitätsanalysen mit analytisch gewonnenen Lösungen aus der linearen bzw. nichtlinearen Beultheorie.
4. Verifikation der aufgestellten Berechnungsabläufe anhand einer Struktur mit bekanntem, analytisch bestimmbarem Stabilitätsverhalten und Überprüfung der Leistungsfähigkeit verschiedener Finiten Elementtypen im Rahmen numerischer Stabilitätsanalysen.

4.4.1 Lastfall konstante Druckspannung σ

Alle hier untersuchten unausgesteiften Platten, so genannte „Einzelfelder“, waren an den Rändern, rechtwinklig zur Plattenebene, unverschieblich und gelenkig gelagert.

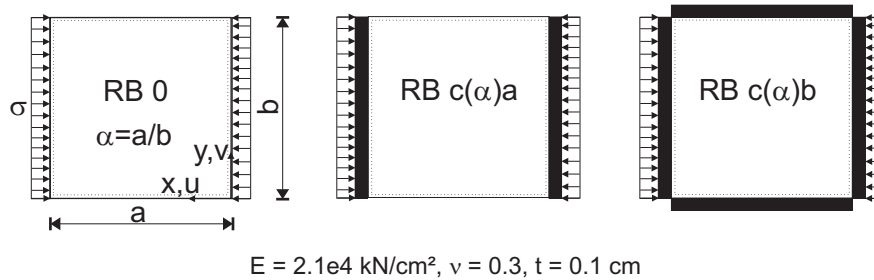


Abbildung 4.11: Untersuchte Systeme, Lastfall σ

Zusätzlich wurden entsprechend Abb. 4.11 die folgenden drei Randbedingungsvarianten berücksichtigt:

- RB 0** Die Ränder konnten sich in Plattenebene frei verformen. Diese Bedingung diente als theoretischer, ungünstigster Fall zu Vergleichszwecken.
- RB $c(\alpha)a$** An den Lasträndern wurden zusätzliche Verschiebungszwangsbedingungen angebracht, die im Laufe der Verformung ein Geradebleiben der jeweiligen Ränder bewirkten. Diese Randbedingung orientiert sich an den Randbedingungen bei Plattenbeulversuchen.
- RB $c(\alpha)b$** Zusätzlich zu den Lasträndern wurden hier auch die Längsränder mit den Verschiebungszwangsbedingungen in Plattenebene versehen. Dieses Modell kommt dem, üblicherweise im baupraktischen Nachweis verwendeten, so genannten „Gitterrostmodell“, nahe.

Die Untersuchungen erfolgten für Seitenverhältnisse $\alpha = 0.5, 1.0, 2.0$ und $b/t = 50, 55 \dots 100$. Baupraktisch wird als Plattenparameter der Schlankheitsgrad λ_p verwendet:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{Pi}}}$$

Die untersuchten Platten lagen in einem Bereich $\lambda_p = 82 \dots 165$ für die Seitenverhältnisse $\alpha = 1.0$ bzw. $\alpha = 2.0$ und $\lambda_p = 66 \dots 132$ für $\alpha = 0.5$.

Zu Vergleichszwecken wurden sowohl FE - Modelle mit dreiknotigen, geometrisch nichtlinearen Platten - Membran Elementen GEOSHELL3n [55] als

auch mit neunknotigen isoparametrischen Schalenelementen GEOSHELL9n [52] verwendet.

Die FE - Modelle waren im Einzelnen:

	GEOSHELL3n			GEOSHELL9n		
Anzahl	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 2.0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 2.0$
Knoten	1431	1681	1891	1225	1681	1891
Elemente	2704	3200	3600	288	400	450
DOF's (RB 0)	6995	8241	9271	5977	8241	9271

Tabelle 4.1: Kennzahlen der verwendeten FE - Modelle

Die Belastung σ wurde so gewählt, dass aus dem globalen Lastvektor eine konstante Scheibennormalspannung von $\sigma_x = 1.0 \text{ kN/cm}^2$ resultiert. Somit entspricht der Laststeigerungsfaktor λ der äußeren Beanspruchung.

Lineare Stabilitätsanalysen

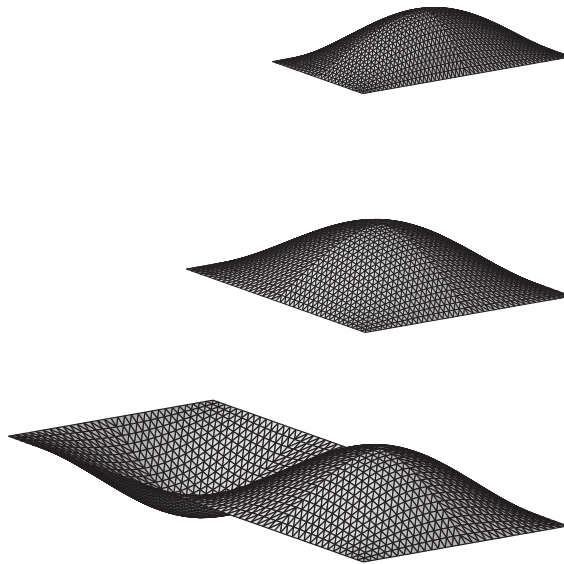


Abbildung 4.12: Singulärvektoren Φ^c - $\alpha = 0.5, 1.0, 2.0$

Nach der linearen Beultheorie ergibt sich die kritische Beulspannung zu:

$$\sigma_{xPi} = k_{\sigma x} \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2.$$

Der Beulwert $k_{\sigma x}$ beträgt 6.25 für $\alpha = 0.5$ und 4.0 für $\alpha = 1.0$ bzw. $\alpha = 2.0$. Die zugehörige Beulform ist in Längsrichtung für $\alpha = 0.5$ und $\alpha = 1.0$ einwellig, für $\alpha = 2.0$ zweiwellig.

In der numerischen linearen Stabilitätsanalyse wurden die kleinsten kritischen Punkte λ^c anhand des folgenden Eigenproblems ermittelt:

$$(\mathbf{K}^0 + \lambda^c \Delta \mathbf{K}) \Phi^c = \mathbf{K}^c \Phi^c = \mathbf{0}.$$

Hierbei stellt $\Delta \mathbf{K}$ die Steifigkeitsdifferenz zwischen der Initialsteifigkeit \mathbf{K}^0 im unbelasteten Zustand und der Steifigkeit für $\lambda = 1.0$ dar.

Sämtliche Ergebnisse für λ^c für die GEOSHELL3n - Modelle sind im Anhang D.1 aufgeführt. Die von α abhängigen Beulformen Φ^c zeigt - in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der linearen Beultheorie - Abb. 4.12. Die Abweichungen zwischen analytisch und numerisch ermittelten Beulspannungen liegen unter 0.5%. Ebenso zeigen sich hier kaum Unterschiede bei der Verwendung der GEOSHELL3n- oder der GEOSHELL9n - Modelle. Eine nichtlineare Stabilitätsanalyse zur Ermittlung von λ^c erübrigt sich, da die jeweiligen primären Last - Verformungspfade linear verlaufen und damit eine Approximation hinreichend genau ist.

Bei allen kritischen Punkten handelt es sich um Verzweigungspunkte mit:

$$\mathbf{F}^T \Phi^c \approx 0.$$

Nachbeulanalyse

In [7] wird ein Maß für das Verhältnis zwischen Nachbeul- und Vorbeulsteifigkeit - $\mathbf{K}^s / \mathbf{K}^p$ - definiert. Es setzt die Berechnung des quadratischen Nachbeulparameters $\hat{\lambda}^s$ in λ^c voraus und lautet:

$$\frac{\mathbf{K}^s}{\mathbf{K}^p} = \left(1 - \frac{\Phi^T (\mathbf{K}_{,q} \Phi) \hat{\mathbf{q}}^p}{\hat{\lambda}^s (\hat{\mathbf{q}}^p)^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{q}}^p} \right)^{-1}.$$

Im Verzweigungspunkt sind dafür die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , ihre Ableitung nach den Verformungen $\mathbf{K}_{,q}$ sowie die Tangente an den primären Pfad $\hat{\mathbf{q}}^p$ zu ermitteln. Das Steifigkeitsverhältnis $\mathbf{K}^s / \mathbf{K}^p$ bietet sich an, um die Einflüsse

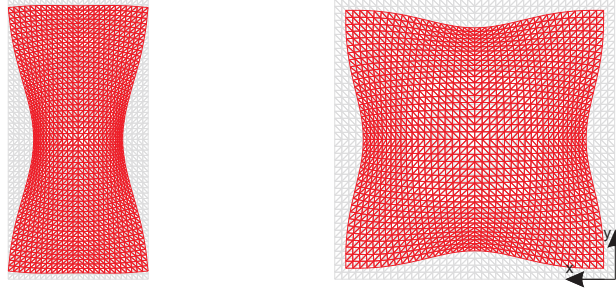


Abbildung 4.13: $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1.0$, **RB 0**

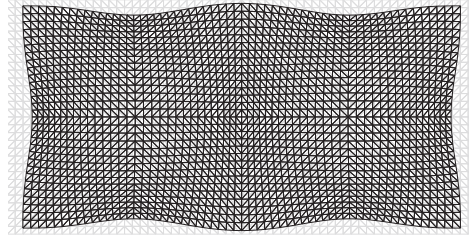


Abbildung 4.14: $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$, $\alpha = 2.0$, **RB 0**

der Plattenparameter b/t und α sowie unterschiedlicher Randbedingungen auf das Nachbeulverhalten zu untersuchen.

Der Primärpfad verläuft linear. Somit ist die Tangente $\hat{\mathbf{q}}^p$ konstant und damit auch im singulären Punkt bekannt. Als spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}$ wurde die Tangente $\hat{\mathbf{q}}^p$ verwendet. Damit gilt $C = 0$ entsprechend Abschn. 3.8.2. Zur Bestimmung von $\dot{\lambda}^s$ sind die Koeffizienten A und B nach Gl.(3.80) zu bestimmen. In allen untersuchten Fällen ergab sich $A \approx 0$ und damit:

$$\dot{\lambda}^s \approx 0 \quad \rightarrow \quad \text{symmetrische Verzweigung.}$$

Für $\dot{\lambda}^s$ sind vorab die spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ aus Gl.(3.82) und anschließend die Koeffizienten D und E nach Gl.(3.84) zu ermitteln. Hierfür wurde der Algorithmus `postbuckling-symm.s` aus Abschn. 3.8.7 verwendet. Die speziellen Lösungen $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ sind für die verschiedenen Seitenverhältnisse und Randbedingungen in den Abb. 4.13 - 4.17, 1000-fach überhöht, im Vergleich zur unverformten Struktur dargestellt.

Die Nachbeulanalysen wurden für verschiedene b/t - Verhältnisse und Randbedingungen für die in Tab. 4.1 aufgeführten Modelle durchgeführt. Dabei konnte $\dot{\lambda}^s$ mit beiden Modelltypen, $\dot{\lambda}^s$ jedoch nur im Fall der GEOSHELL3n - Modelle zuverlässig bestimmt werden.

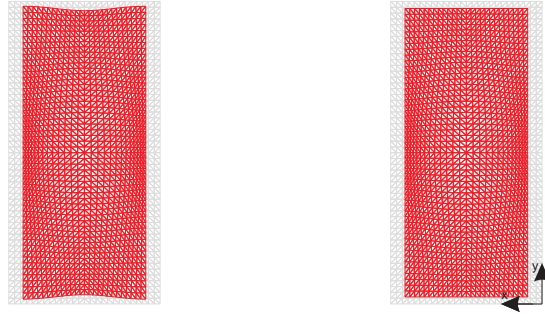


Abbildung 4.15: $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$, $\alpha = 0.5$, **RB c05a** und **c05b**

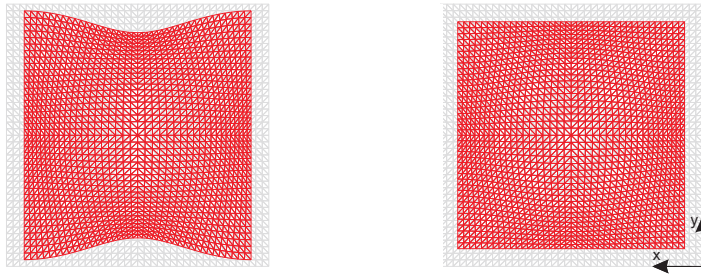


Abbildung 4.16: $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$, $\alpha = 1.0$, **RB c1a** und **c1b**

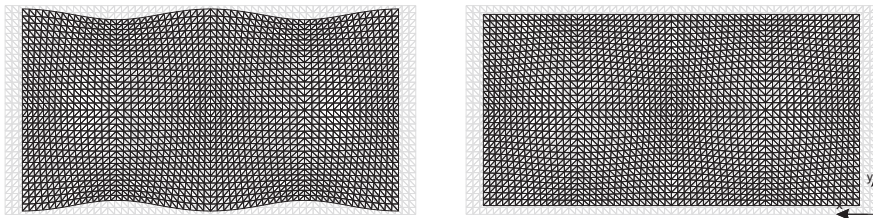


Abbildung 4.17: $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$, $\alpha = 2.0$, **RB c2a** und **c2b**

Die mit GEOSHELL9n diskretisierten Systeme wiesen innerhalb der numerischen Differentiation eine hohe Sensitivität gegenüber dem Differentiationsparameter *ilon* auf. Dies machte es unmöglich, den Koeffizienten D zu bestimmen. Es ist zu vermuten, dass Schwächen in der Formulierung dieses Elementtyps bestehen, die jedoch erst bei speziellen Anforderungen, wie in diesem Fall, hervortreten. Da dieses Problem im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden konnte, wurden die quadratischen Nachbeulparameter nur noch anhand der GEOSHELL3n - Modelle ermittelt. Hierfür sind sämtliche Ergebnisse im Anhang D.1 aufgeführt.

Aus den Berechnungen zu den quadratischen Nachbeulinkrementen ergeben sich folgende Sachverhalte:

- Aus den Abb. 4.13 - 4.17 wird deutlich, dass die Form von $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ nur von α und der gewählten Randbedingung, nicht jedoch vom konkreten b/t - Verhältnis abhängig ist. $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ und damit auch $\dot{\mathbf{q}}^s$ enthalten ausschließlich Verschiebungen in Plattenebene. In allen Fällen gilt:

$$\dot{\lambda}^s > 0.$$

Damit bestätigen diese Untersuchungen die bekannte Aussage aus der Beultheorie, dass es sich hier um **symmetrisch stabile Verzweigungen** handelt. Es existiert ein mit einem Lastanstieg verbundener sekundärer Gleichgewichtspfad. Dieses Verhalten wird in der Ingenieurpraxis als überkritisches Tragvermögen bezeichnet.

- Das Steifigkeitsverhältnis $\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p$ ist offensichtlich im Wesentlichen von den gewählten Randbedingungen und Seitenverhältnissen α , jedoch kaum vom b/t - Verhältnis abhängig. Bei Änderung der Randbedingungen von **RB 0** über **RB c(α)a** zu **RB c(α)b** sind erhebliche Steigerungen für $\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p$ zu verzeichnen. Eine höhere Nachbeulsteifigkeit bedeutet auch eine größere überkritische Tragreserve.
- Bei $\alpha = 0.5$ wirkt sich die Einführung von zusätzlichen geometrischen Zwangsbedingungen an den Rändern gegenüber **RB 0** besonders steifigkeitserhöhend aus, wobei hierfür offensichtlich speziell die Zwangsbedingung an den Lasträndern maßgeblich ist. Für **RB 0** sind in diesem Fall nur sehr geringe Nachbeulsteifigkeiten vorhanden, was auf einen nahezu horizontalen Verlauf des sekundären Pfades durch den Verzweigungspunkt schließen läßt.
- Bei der quadratischen Platte führen die Zwangsbedingungen **RB c(α)a** bzw. **RB c(α)b** zu einer $\approx 20\%$ -igen bzw. $\approx 45\%$ -igen Erhöhung der

Nachbeulsteifigkeit gegenüber **RB 0**. Im Gegensatz zu **RB 0** unterscheiden sich bei den anderen Randbedingungen die $\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p$ - Verhältnisse kaum zwischen $\alpha = 1.0$ und $\alpha = 2.0$.

In [33] wird als exakter Wert für die unendlich lange Platte mit **RB 0** der Wert $\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p = 0.408$ angegeben. Die eigenen Ergebnisse (≈ 0.38) liegen etwas darunter. Testrechnungen für $\alpha > 2$ ergaben eine Annäherung an den Referenzwert.

Sekundäre Gleichgewichtspfade

Auf der Basis der Nachbeulergebnisse lassen sich quadratische Approximationen für die sekundären Pfade erzeugen durch:

$$\begin{aligned}\lambda^s &= \lambda^c + \frac{1}{2}\dot{\lambda}s^2 \\ \mathbf{q}^s &= \mathbf{q}^c + \Phi^c s + \frac{1}{2}\left(\dot{\lambda}\hat{\mathbf{q}}^p + \tilde{\mathbf{q}}^\perp\right)s^2.\end{aligned}$$

Als Pfadparameter s wurde einheitlich der zur maximalen Beulamplitude gehörende Freiheitsgrad gewählt.

Parallel dazu wurden die Sekundärpfade durch einen Pfadwechsel mit anschließender Pfadverfolgung (Algorithmus `path-switch.s` aus Abschn. 3.9.2) ermittelt. Als charakteristische Verformungsgrößen wurden die Last - Verformungskurven für die Durchbiegung \mathbf{w} , die Stauchung am Lastrand \mathbf{u} und die Verschiebung quer zum Plattenlängsrand \mathbf{v} aufgezeichnet.

Abb. 4.18 - 4.20 zeigen sowohl den numerisch ermittelten als auch den approximierten sekundären Gleichgewichtspfad für ein konkretes Beispiel (Modell: GEOSHELL3n). Aufgrund der symmetrischen Verzweigung ist in Abb. 4.20 nur eine Hälfte des sekundären Pfades dargestellt.

Die numerisch bzw. näherungsweise ermittelten sekundären Pfade weisen, auch bei anderen b/t - Verhältnissen, Randbedingungen und Seitenverhältnissen, eine sehr gute Übereinstimmung auf. Auch für Lasthöhen $\lambda \gg \lambda^c$, wie z.B. in Abb. 4.21, konnten noch sehr gute Näherungen erzielt werden. Die sekundären Pfade wurden bis zu einem später noch definierten Lastniveau (Marke 36) verfolgt. Die Beulverformungen entlang des Sekundärpfades werden maßgeblich durch den jeweiligen Singulärvektor bestimmt.

Begleitend zur Pfadverfolgung wurde der kleinste Standardeigenwert der tangentiellen Steifigkeitsmatrix beobachtet. In allen Fällen traten keine kritischen Punkte auf - der Verlauf des ersten Eigenwertes zeigte keine auffälligen Sprünge oder Knicke. Da die Steifigkeitsmatrix damit in jeder berechneten Laststufe positiv definit ist, sind die berechneten Gleichgewichtspunkte entlang des sekundären Pfades stabil.

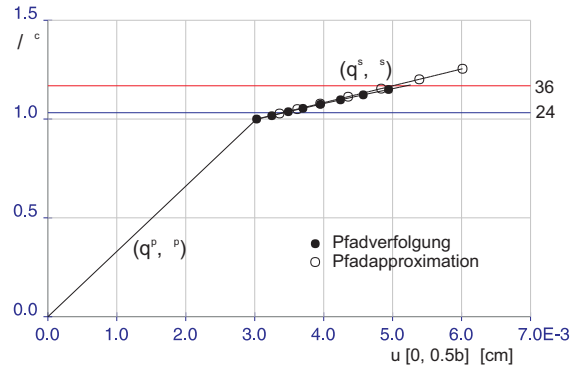


Abbildung 4.18: Sekundärer Pfad: $u - \alpha = 1.0$, $b/t = 60$, **RB 0**

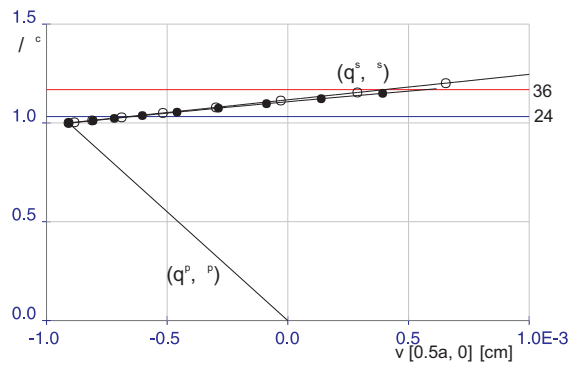


Abbildung 4.19: Sekundärer Pfad: $v - \alpha = 1.0$, $b/t = 60$, **RB 0**

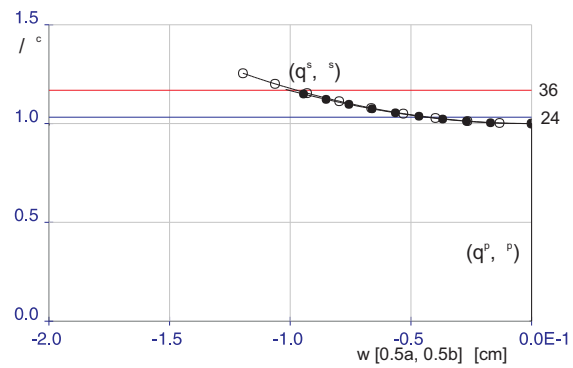


Abbildung 4.20: Sekundärer Pfad: $w - \alpha = 1.0$, $b/t = 60$, **RB 0**

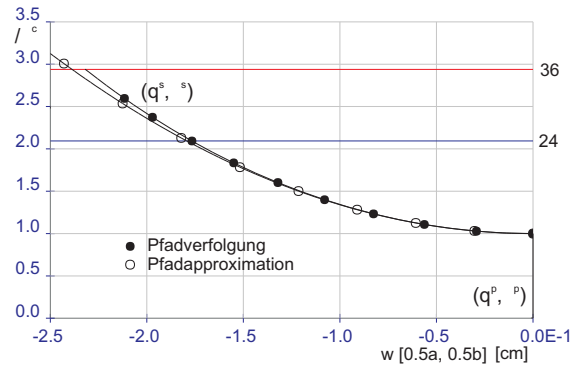


Abbildung 4.21: Sekundärer Pfad: $w - \alpha = 1.0$, $b/t = 100$, **RB c1b**

In [64] wird für die Durchbiegung einer quadratischen Platte mit **RB c1b** im Nachbeulbereich folgende Gleichung angegeben:

$$w[0.5a, 0.5b] = \frac{4b}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma - \sigma_{xPi}}{(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}) E}}.$$

Der dabei verwendete Ansatz für die Biegefläche lautet:

$$w = w[0.5a, 0.5b] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Abb. 4.22 zeigt einen Vergleich dieser analytischen Lösung mit ausgewählten, numerisch ermittelten Sekundärpfaden. Während bei den mit GEOSHELL3n

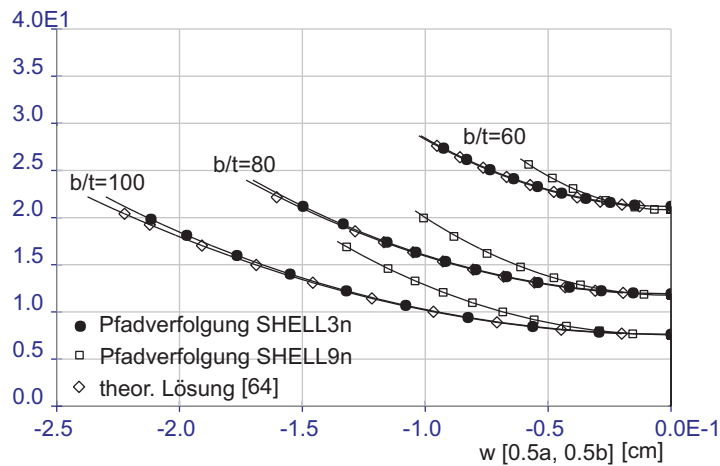


Abbildung 4.22: Vergleich zwischen analytisch und numerisch ermittelten Sekundärpfaden, $\alpha = 1.0$, **RB c1b**

diskretisierten Platten eine sehr gute Übereinstimmung festzustellen ist, weichen die Pfade bei Verwendung der GEOSHELL9n - Schalenelemente erheblich von der analytischen Lösung ab. Damit sind auch für die Höhe der überkritischen Tragreserven große Unterschiede zwischen den GEOSHELL3n - und GEOSHELL9n - Modellen zu erwarten. Wie auch schon bei der Nachbeulanalyse zeigen sich hier Probleme bei der Anwendung der Schalenelemente GEOSHELL9n. Die Pfadverläufe deuten auf eine Überschätzung der Steifigkeiten im geometrisch nichtlinearen Bereich hin.

Überkritisches Tragvermögen

Aufgrund der symmetrisch stabilen Verzweigung ist die Tragfähigkeit einer Platte nicht durch das Erreichen des kritischen Punktes erschöpft. Werden Beulverformungen zugelassen, ist eine Laststeigerung über λ^c hinaus möglich.

Im überkritischen Bereich stellt sich in der Plattenmittelfläche ein nichtlinearer Spannungsverlauf σ_x mit einem, zum Längsrand hin ansteigenden Gradienten $\sigma_R > \sigma_{Pi}$, ein. Es existieren verschiedene theoretische und empirische Ansätze, um eine Abhängigkeit der äußeren konstanten Scheibenspannung σ von der Randspannung σ_R herzustellen [42]. Zu nennen sind hier vor allem die Ansätze nach *Marquerre* bzw. *Kármán*:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{xPi} + \sigma_R) \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_{xPi} \sigma_R}.$$

In der Mitte der Platte gilt weiterhin $\sigma_x = \sigma_{Pi}$. Als Grenze der überkritischen Tragfähigkeit wird das Erreichen der Fließspannung f_y am Längsrand festgelegt. Dies führt nach *Kármán* auf die überkritische Tragfähigkeit σ_u :

$$\sigma_R = f_y \quad \rightarrow \quad \sigma = \sigma_u = \sqrt{\sigma_{xPi} f_y}.$$

Die Formeln setzen $\alpha \geq 1.0$ sowie Randbedingungen entsprechend **RB c**(α)**b** (Gitterrostmodell) voraus.

Aus den vorangegangenen Analysen sind die sekundären Pfade bekannt, so dass sich nun die überkritischen Tragreserven direkt ermitteln lassen. Dies könnte anhand der asymptotischen Pfadnäherung erfolgen, indem schrittweise approximierte Verformungsfelder auf die Struktur aufgebracht werden, um anschließend Spannungsauswertungen durchzuführen.

Hier wurde ein anderes Vorgehen gewählt. Während der Verfolgung des Sekundärpfades wurde der Spannungsverlauf σ_x entlang maßgebender Schnitte beobachtet. Die Auswertung erfolgte für Integrationspunkte auf den jeweiligen Schnitten, die bei $\alpha = 0.5$ bzw. 1.0 näherungsweise in der Nähe der Symmetrieachse $(0.5a, y)$, bei $\alpha = 2.0$ entlang der Achse $(0.25a, y)$ liegen.

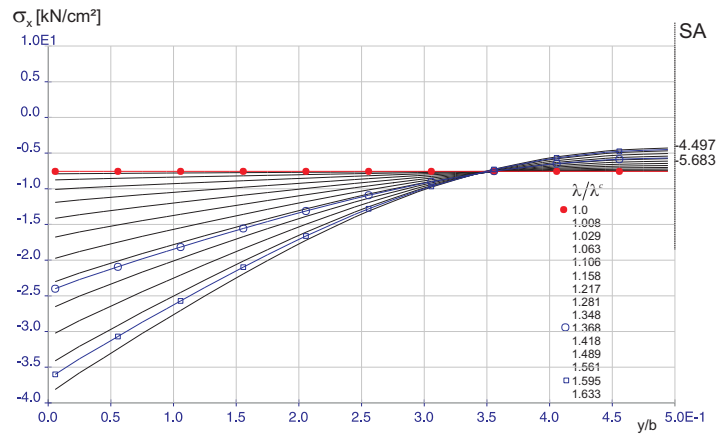


Abbildung 4.23: Spannungsverteilung σ_x , $\alpha = 1$, $b/t = 100$, **RB 0**

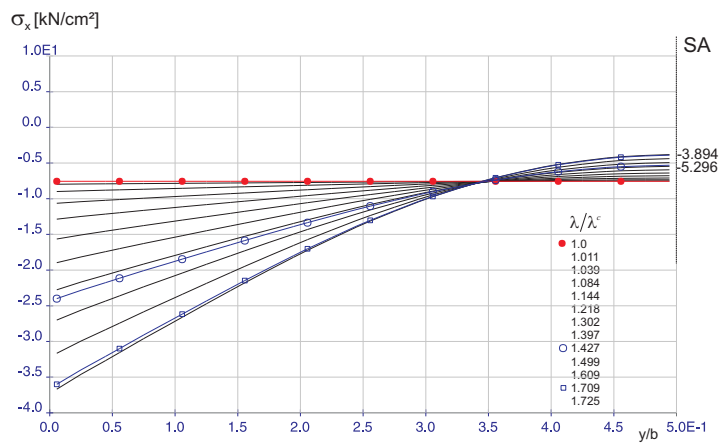


Abbildung 4.24: Spannungsverteilung σ_x , $\alpha = 1$, $b/t = 100$, **RB c1a**

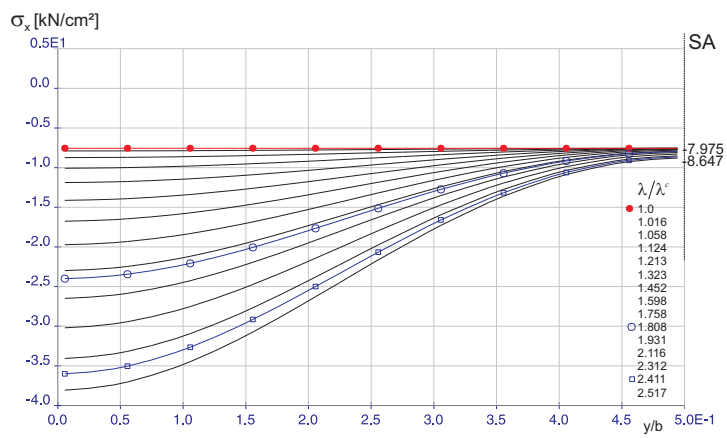


Abbildung 4.25: Spannungsverteilung σ_x , $\alpha = 1$, $b/t = 100$, **RB c1b**

Als Grenze der überkritischen Tragfähigkeit wurde das Erreichen von f_y am jeweils äußersten Integrationspunkt ($\approx \sigma_R$) festgelegt. Beim Material soll es sich um S 235 ($f_y = 24.0 \text{ kN/cm}^2$) bzw. S 355 ($f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2$) handeln. Die Pfadverfolgung wurde bei $\sigma_R > 36.0 \text{ kN/cm}^2$ abgebrochen. Da während der Pfadverfolgung die gesuchte Lasthöhe nur zufällig oder bei extrem kleinen Prädiktorschritten direkt erreicht wird, wurden näherungsweise die gesuchten Laststufen aus den benachbarten Gleichgewichtszuständen interpoliert.

In den Abb. 4.23 - 4.25 sind an einem konkreten Beispiel unter verschiedenen Randbedingungen die Spannungsauswertungen für ausgewählte Lastniveaus dargestellt (Modell: GEOSHELL9n). In den Abbildungen sind die folgenden Laststufen $\lambda \geq \lambda^c$ gekennzeichnet:

- $\longrightarrow \lambda = \lambda^c$
- $\longrightarrow \lambda/\lambda^c$ bei $\sigma_R = 24.0 \text{ kN/cm}^2$
- $\longrightarrow \lambda/\lambda^c$ bei $\sigma_R = 36.0 \text{ kN/cm}^2$.

In den Abbildungen der sekundären Pfade des Abschn. 4.4.1 sind mit „24“ und „36“ ebenfalls die zugehörigen Grenzlaststufen markiert.

Die Spannungsauswertung nach Abb. 4.23 ergibt beispielsweise, dass für den speziellen Fall mit $\lambda^c = 7.56$ bei S 235 eine $\approx 37\%$ -ige und bei S 355 eine $\approx 60\%$ -ige überkritische Tragreserve vorhanden ist. Die äußere Beanspruchung kann somit theoretisch bis auf $\sigma_u = 10.34 \text{ kN/cm}^2$ (S 235) bzw. $\sigma_u = 12.06 \text{ kN/cm}^2$ (S 355) gesteigert werden. Sämtliche Ergebnisse zu den überkritischen Tragreserven, sowohl für die GEOSHELL3n- als auch für die GEOSHELL9n - Modelle, sind im Anhang D.1 dokumentiert.

Infolge des zweiwelligen Ausbeulens bei $\alpha = 2.0$ unterscheiden sich die überkritischen Tragreserven wie auch die Beulspannungen kaum von $\alpha = 1.0$. Aus den Abb. 4.23 - 4.25 wird deutlich, dass **RB c**(α)**a** bei $\alpha = 1.0$ und 2.0 nur geringe Änderungen in der Spannungsverteilung hervorruft. Dagegen führt Randbedingung **RB c**(α)**b** sowohl zu einer erheblichen Vergrößerung der überkritischen Tragreserve als auch zu einer grundlegenden Änderung des Spannungsverlaufs. Diese Spannungsverteilung bestätigt im Wesentlichen die Annahmen der analytischen Vorgehensweise nach *Marquerre*. Zum einen stellt sich tatsächlich ein cosinus - förmiger Spannungsverlauf ein, zum anderen bleibt die Spannung in Plattenmitte nahezu auf dem Niveau von σ_{Pi} . Dagegen geht *Kármán* von einer Spannungsverteilung mit steilerem Gradienten zum Rand hin aus. Hier sind offensichtlich bereits Einflüsse aus Imperfektionen enthalten, die die Spannungsverteilung verändern.

In den Abb. 4.26 und Abb. 4.27 sind in Anlehnung an [42] die theoretischen und numerisch ermittelten überkritischen Tragreserven für den Fall $\alpha = 1.0$ und $f_y = 24.0 \text{ kN/cm}^2$ bzw. $f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2$ gegenübergestellt.

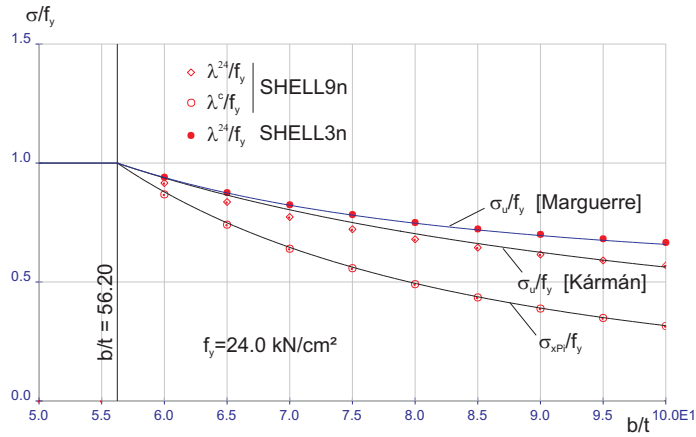


Abbildung 4.26: Analytische vs. numerische Lösung: überkritische Tragreserven, $\alpha = 1.0$, **RB c1b**, $f_y = 24.0 \text{ kN/cm}^2$

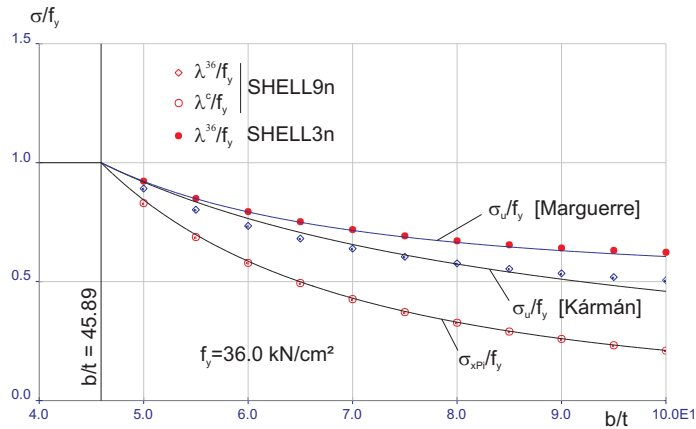


Abbildung 4.27: Analytische vs. numerische Lösung: überkritische Tragreserven, $\alpha = 1.0$, **RB c1b**, $f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2$

Überkritische Tragfähigkeiten sind bei $f_y = 24.0 \text{ kN/cm}^2$ ab $b/t = 56.2$, bei $f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2$ ab $b/t = 45.89$ vorhanden. In beiden Fällen zeigt sich, dass zwischen den - anhand der GEOSHELL3n - Modelle gewonnenen - numerischen und den analytischen Ergebnissen nach *Marguerre* eine sehr gute Übereinstimmung besteht. Die GEOSHELL3n- und GEOSHELL9n - Modelle zeigen zwar in den qualitativen Spannungsverläufen keine Unterschiede, in den erreichten überkritischen Lasthöhen sind jedoch erhebliche Abweichungen festzustellen. Die Nähe der Ergebnisse der GEOSHELL9n - Modelle und der *Kármán* - Lösung scheint zufällig zu sein.

Ein Vergleich der überkritischen Tragreserven für die verschiedenen Randbedingungen ergibt, dass **RB 0** mit freien Last- und Längsrändern am un-

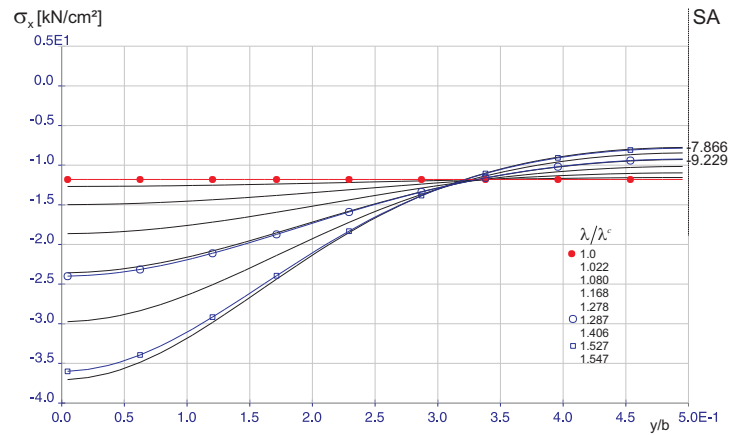


Abbildung 4.28: Spannungsverteilung σ_x , $\alpha = 0.5$, $b/t = 100$, **RB c1b**

günstigsten ist, das heißt die Systeme die geringsten Tragreserven besitzen. Dagegen führen **RB c1b** bzw. **RB c2b** mit verformungsbehinderten Last- und Längsrändern auf die größten überkritischen Tragreserven.

Für $\alpha \leq 1.0$ ändert sich das Last - Verformungsverhalten im überkritischen Bereich grundlegend. Das Tragverhalten nähert sich dem einer Platte mit freien Längsrändern an. Für solche Platten, die eine Kombination aus platten- und stabähnlichem Verhalten aufweisen, das als „knickstabähnliches Verhalten“ bezeichnet wird, sind kaum überkritische Tragreserven vorhanden.

Im praktischen Beulsicherheitsnachweis wird „knickstabähnliches Verhalten“ durch erhöhte Sicherheiten berücksichtigt [39]. Für den Lastfall konstanter

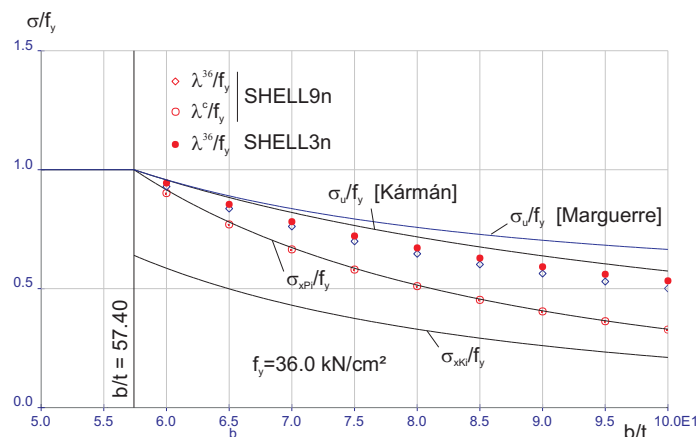


Abbildung 4.29: Analytische vs. numerische Lösung: überkritische Tragreserven, $\alpha = 0.5$, **RB c05b**, $f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2$

Druck ist für $\alpha < 0.644$ knickstabähnliches Verhalten zu erwarten [36].

Für $\alpha = 0.5$ existieren keine analytischen Formeln zur überkritischen Tragreserve oder Spannungsverteilung. Die numerische Vorgehensweise ermöglicht auch hier Aussagen zur überkritischen Tragreserve. Die Spannungsverteilungen bei $x = 1/2a$ zeichnen sich im Unterschied zu den Fällen $\alpha = 1.0$ oder 2.0 dadurch aus, dass in Plattenmitte die Beulspannung nicht erhalten bleibt. Im konkreten Fall nach Abb. 4.28 ist ein 50%-iger Abfall von σ_{xPi} für die Grenztragfähigkeit λ^{36} zu verzeichnen.

Nennenswerte überkritische Tragreserven existieren im Fall $\alpha = 0.5$ erst bei hohen Plattenschlankheiten. **RB c05b** führt nur zu geringen Zuwächsen bei der überkritischen Tragreserve. In Abb. 4.29 werden für $\alpha = 0.5$ und $f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2$ die numerischen mit den „analytischen“ Werten, ungeachtet ihrer Gültigkeitsgrenze $\alpha \geq 1.0$, miteinander verglichen.

Hieraus wird deutlich, dass beim „knickstabähnlichem“ Verhalten die Lösungen sowohl nach *Marguerre* als auch nach *Kármán* zu erheblichen Überschätzungen der überkritischen Tragreserve führen würden. Da dies im baupraktischen Nachweis verhindert werden muß, wurde in [39] für den Einfluß des „Knickstabverhaltens“ ein zusätzlicher Abminderungsfaktor κ_K eingeführt.

4.4.2 Lastfall Biegerandspannung σ_1

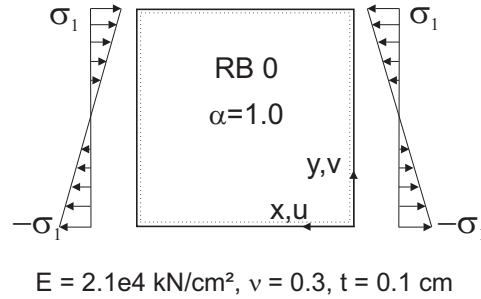


Abbildung 4.30: System, Lastfall σ_1

Einen weiteren Grundbeulfall stellt das durch Biegerandspannungen beanspruchte Beulfeld dar. Die numerische Stabilitätsanalyse erfolgte exemplarisch an einer quadratischen Platte nach Abb. 4.30 mit **RB 0**, einer Plattenschlankeit von $b/t = 150$ und einem Randspannungsverhältnis von $\psi = -1.0$. Dabei wird durch **RB 0** der ungünstigste Fall behandelt, das praktische Stabilitätsverhalten wird im Allgemeinen aufgrund von Randsteifen günstiger ausfallen. Der globale Lastvektor \mathbf{F} wurde für die numerische Rechnung so kalibriert, dass sich ein Grundzustand mit $\sigma_1 = 1.0 \text{ kN/cm}^2$ einstellt und somit $\lambda = \sigma_1$ gilt.

Die ersten drei Eigenformen einer linearen Stabilitätsanalyse sind in Abb. 4.31 dargestellt. Die ermittelten kritischen Lastfaktoren und die Beulverformungen im Biegedruckbereich stimmen sowohl wertemäßig als auch qualitativ sehr gut mit den Ergebnissen der linearen Beultheorie überein. Im Einzelnen lauten die numerischen und analytischen Ergebnisse (in Klammern die

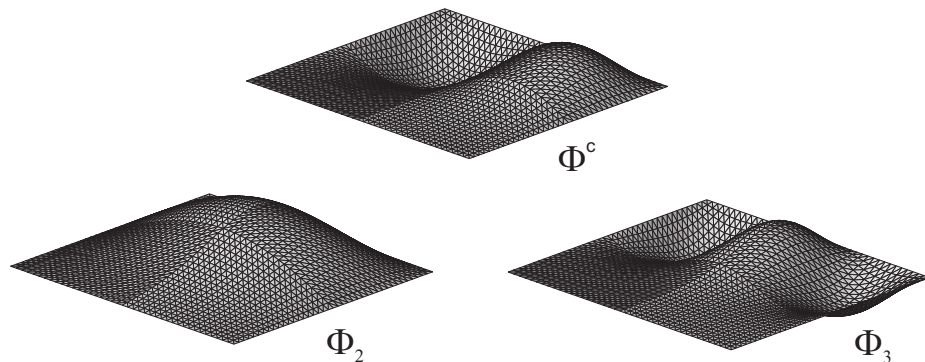


Abbildung 4.31: Lineare Stabilitätsanalyse - Eigenvektoren, Lastfall σ_1

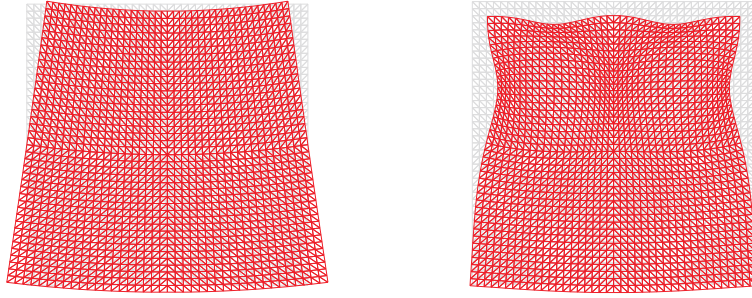


Abbildung 4.32: $\hat{\mathbf{q}}^p$ und $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$, Lastfall σ_1

Ergebnisse der linearen Beultheorie):

$$\begin{aligned} \lambda^c &= 21.722 & [\sigma_{1Pi} &= 21.624 \text{ kN/cm}^2 \text{ 2-wellig}] \\ \lambda_2 &= 23.102 & [\sigma_{1Pi} &= 22.888 \text{ kN/cm}^2 \text{ 1-wellig}] \\ \lambda_3 &= 28.776 & [\sigma_{1Pi} &= 29.003 \text{ kN/cm}^2 \text{ 3-wellig}]. \end{aligned}$$

Es handelt sich bei λ^c , wie auch bei den anderen kritischen Punkten, um einen Verzweigungspunkt:

$$\mathbf{F}^T \Phi^c = 1.7141 e-17 \approx 0.$$

Aus einer Nachbeulanalyse im kleinsten kritischen Punkt ergeben sich für die lineare bzw. quadratische Änderung des Lastparameters:

$$\dot{\lambda}^s = -4.0162 e-9 \approx 0 \quad \text{und} \quad \dot{\lambda}^s = 0.28587 > 0.$$

Damit handelt es sich bei diesem Stabilitätsproblem, wie schon bei den zuvor behandelten Plattenbeulfällen, ebenfalls um eine **symmetrisch stabile Verzweigung**. Das Verhältnis von Nachbeulsteifigkeit zur Vorbeulsteifigkeit beträgt hier:

$$\frac{K^s}{K^p} = 0.5771.$$

Abb. 4.32 zeigt die verformten Strukturen für die in der Nachbeulanalyse verwendeten Tangentenlösung $\hat{\mathbf{q}}^p$ und die spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ in 3000- bzw. 1000- facher Überhöhung. Sowohl $\hat{\mathbf{q}}^p$ als auch $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ enthalten ausschließlich Verformungen in Plattenebene.

Der sekundäre Pfad wurde wieder zum einen durch einen Pfadwechsel mit anschließender Pfadverfolgung und zum anderen durch eine Approximation mit den Ergebnissen aus der Nachbeulanalyse ermittelt. Dabei wurde

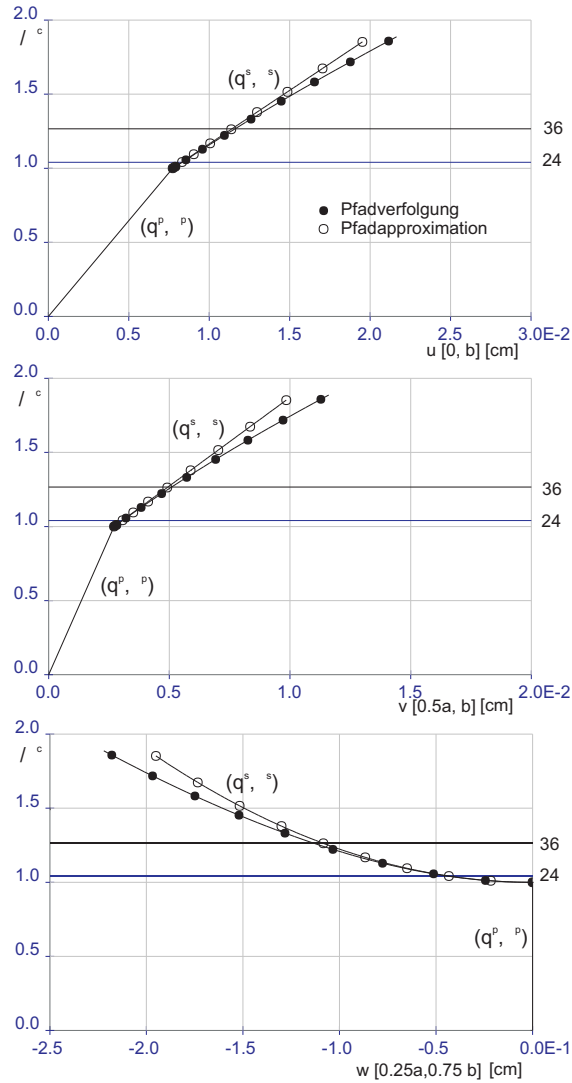


Abbildung 4.33: Sekundärer Pfad - u , v , w , Lastfall σ_1

als Pfadparameter wieder die Plattendurchbiegung am Freiheitsgrad mit der maximalen Amplitude ausgewählt. In Abb. 4.33 ist der sekundäre Pfad für drei verschiedene Freiheitsgrade dargestellt. Auch hier ist wieder eine gute Übereinstimmung zwischen dem numerisch ermittelten und dem approximierten Sekundärpfad festzustellen.

Der sekundäre Pfad wurde bis zu einem Lastniveau von $\lambda = 40.99 = 1.89\lambda^c$ verfolgt. Eine begleitend durchgeführte Kontrolle des kleinsten Standard eigenwertes zeigte keine Singularitäten an. Die verformte Struktur für die letzte berechnete Laststufe ist in Abb. 4.34 in Ansicht und Draufsicht in 10- bzw. 50- facher Überhöhung dargestellt.

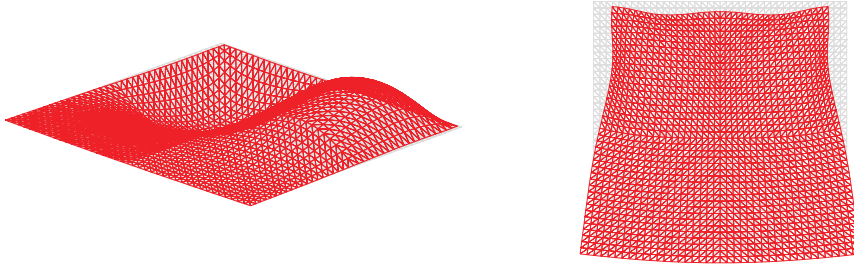


Abbildung 4.34: Beulverformungen, $\lambda = 40.99 = 1.89\lambda^c$

Ein Vergleich der Draufsicht aus Abb. 4.34 mit $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ aus Abb. 4.32 zeigt die Ähnlichkeit beider Verformungsfelder. Die Verschiebung in Plattenebene nach Abb. 4.34 läßt sich erzeugen, wenn die quadratische Lösung $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$ mit einem Vielfachen der Tangentenlösung $\hat{\mathbf{q}}^p$ überlagert wird. Dies entspricht genau dem Vorgehen bei der quadratischen Approximation innerhalb der Nachbeulanalyse.

Um die überkritische Tragreserve zu ermitteln, wurde wieder begleitend eine Spannungsauswertung, hier anhand von Mises - Vergleichsspannungen, am maßgebenden Schnitt bei $x = 0.25a$ durchgeführt. Als Grenztragfähigkeitskriterium wurde wieder das Erreichen der Fließgrenzen $f_y = 24.0 \text{ kN/cm}^2$ bzw. $f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2$ festgelegt. Bei diesem Beispiel mit der hohen Plattenschlankheit von $b/t = 150$ existieren nur geringe überkritische Tragreserven:

$$\begin{aligned} f_y = 24.0 \text{ kN/cm}^2: \quad \lambda^{24}/\lambda^c &= 1.041 \\ f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2: \quad \lambda^{36}/\lambda^c &= 1.266. \end{aligned}$$

Da die Ermittlung der überkritischen Tragfähigkeit auf diesem Wege sehr rechenzeitintensiv ist, kann alternativ eine Abschätzung der überkritischen Tragreserve vorgenommen werden. Dazu wird das approximierte Verformungsfeld für den sekundären Pfad auf die Struktur aufgebracht und anschließend eine Spannungsanalyse durchgeführt. Der Pfadparameter s wird dabei solange variiert, bis das festgelegte Grenzkriterium erreicht ist. Mit diesem Vorgehen ergaben sich folgende Abschätzungen der überkritischen Tragreserve:

$$\begin{aligned} f_y = 24.0 \text{ kN/cm}^2: \quad \tilde{\lambda}^{24}/\lambda^c &= 1.042 \\ f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2: \quad \tilde{\lambda}^{36}/\lambda^c &= 1.263. \end{aligned}$$

Die Abweichungen zu den Ergebnissen aus der Pfadverfolgung sind sehr gering. Damit erweist sich hier die Abschätzung der überkritischen Tragreserve auf der Grundlage einer quadratischen Approximation des Pfadverlaufes als brauchbare, unkompliziert und schnell durchzuführende Alternative. Eine Abschätzung der überkritischen Tragreserve auf diesem Weg wird in der Regel immer dann zutreffende Ergebnisse liefern, wenn, wie in diesem Fall, das Grenzlastniveau nicht weit entfernt vom Verzweigungspunkt ist und eine gute Übereinstimmung zwischen approximiertem und durch Pfadverfolgung ermitteltem Sekundärpfad besteht.

Die überkritische Tragfähigkeit nach dem Beulsicherheitsnachweis [39] wäre, ohne Berücksichtigung von γ_M :

$$\begin{aligned} f_y = 24.0 \text{ kN/cm}^2 &\rightarrow \bar{\lambda}_p = 1.054, \kappa = 0.939, \frac{\sigma_{P,R}}{\sigma_{1Pi}} = 1.042 \\ f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2 &\rightarrow \bar{\lambda}_p = 1.290, \kappa = 0.804, \frac{\sigma_{P,R}}{\sigma_{1Pi}} = 1.338. \end{aligned}$$

Die Grenzbeulspannungen $\sigma_{P,R}$ nach [39] werden, im Gegensatz zu den numerisch ermittelten, am imperfekten System ermittelt. Trotz der Abminderung der theoretischen überkritischen Tragfähigkeit infolge von Imperfektionen sind hier gleiche bzw. höhere Tragfähigkeiten im Vergleich zu den erzielten Ergebnissen zu verzeichnen.

Die Ursache dafür sind unterschiedliche Randbedingungen, die der hier durchgeführten numerischen Stabilitätsanalyse und der praktischen Rechnung zugrunde liegen. Die hier verwendete Randbedingung **RB 0** mit in der Ebene frei verschieblichen Rändern stellt den ungünstigsten Fall mit den kleinsten überkritischen Tragreserven dar. Für die praktische Rechnung wird dagegen von einem Gitterrostmodell mit ausgesteiften Rändern ausgegangen.

4.4.3 Lastfall Randschubspannung τ

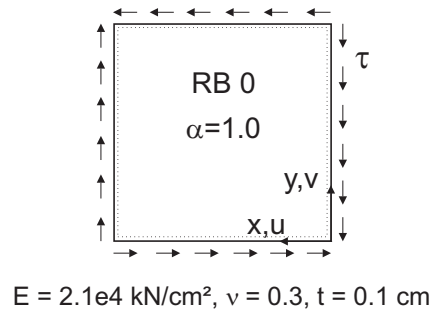


Abbildung 4.35: System, Lastfall τ

Die im vergangenen Abschnitt untersuchte Platte mit $b/t = 150$ und **RB 0** wird nun durch eine konstante Randschubspannung τ entsprechend Abb. 4.35 beansprucht. Im Grundzustand beträgt $\tau = 1.0 \text{ kN/cm}^2$. Die ersten 3 Eigenwerte aus einer linearen Stabilitätsanalyse mit den dazugehörigen Eigenvektoren nach Abb. 4.36 lauten:

$$\begin{aligned} \lambda^c &= 7.922 & [\tau_{Pi} = 7.879 \text{ kN/cm}^2 \text{ 1-wellig}] \\ \lambda_2 &= 9.815 \\ \lambda_3 &= 21.113. \end{aligned}$$

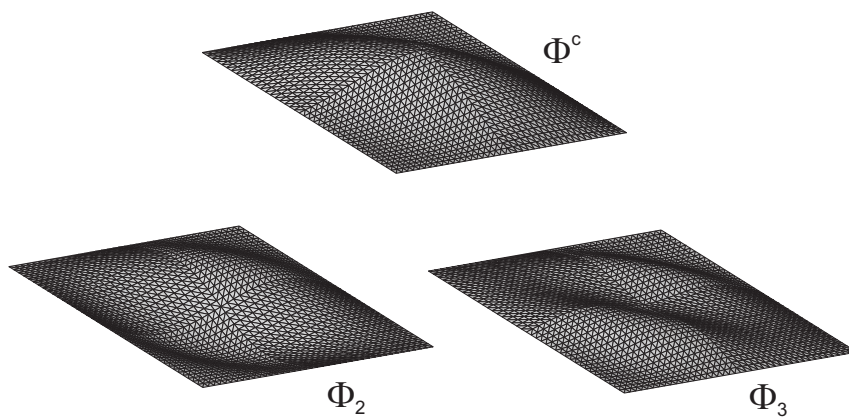


Abbildung 4.36: Lineare Stabilitätsanalyse - Eigenvektoren, Lastfall τ

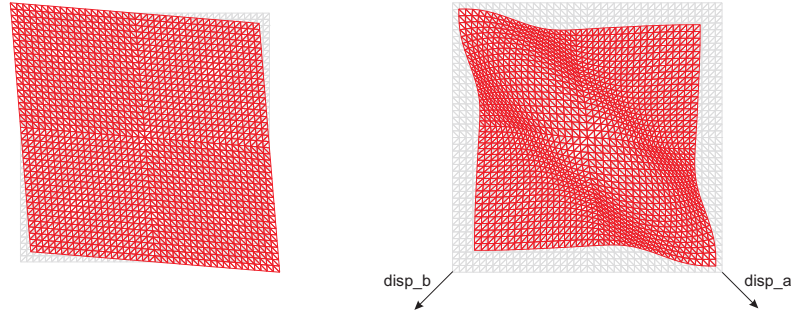


Abbildung 4.37: $\hat{\mathbf{q}}^p$ und $\tilde{\mathbf{q}}^\perp$, Lastfall τ

Die Bedingung für einen Verzweigungspunkt ist bei λ^c erfüllt:

$$\mathbf{F}^T \Phi^c = 6.9855 e-16 \approx 0.$$

Eine Nachbeulanalyse im Verzweigungspunkt ergibt:

$$\dot{\lambda}^s = -9.5914 e-9 \approx 0, \quad \dot{\lambda}^s = 1.9238 > 0, \quad \frac{\mathbf{K}^s}{\mathbf{K}^p} = 0.7063.$$

Auch bei diesem Stabilitätsproblem handelt es sich um eine **symmetrisch stabile Verzweigung**.

Das Verhältnis der Nachbeul- zur Vorbeulsteifigkeit ist größer als bei einer linear veränderlichen Randnormalspannung. Damit ist - unter der Voraussetzung, dass das Grenzlastniveau im Gültigkeitsbereich der asymptotischen Näherung, das heißt möglichst nahe am Verzweigungspunkt liegt - eine höhere kritische Tragreserve zu erwarten.

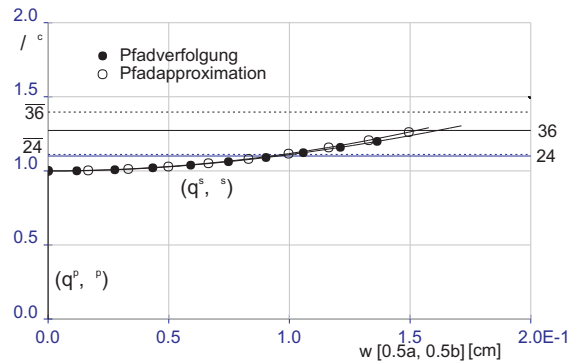


Abbildung 4.38: Sekundärer Pfad - w, Lastfall τ

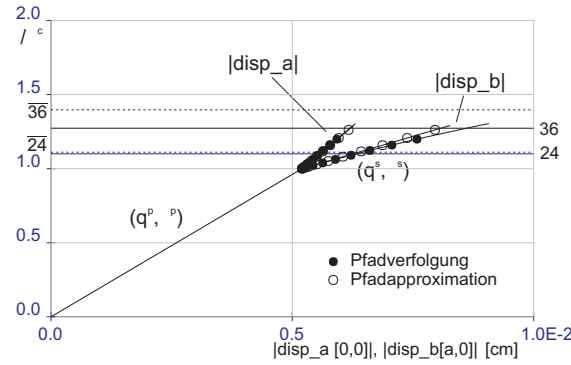


Abbildung 4.39: Sekundärer Pfad - $|disp_a|$, $|disp_b|$, Lastfall τ

In Abb. 4.37 sind die Tangentiallösung \hat{q}^p für den primären Pfad und die spezielle Lösung \tilde{q}^\perp in 5000-facher Überhöhung dargestellt. Auch bei diesem Beulfall enthält \tilde{q}^\perp ausschließlich Verformungen in der Plattenebene.

Den durch Pfadwechsel bzw. Approximation ermittelten Sekundärpfad zeigen Abb. 4.38 und Abb. 4.39. Dabei sind neben der Durchbiegung in Plattenmitte die Beträge der Eckverschiebungen in Richtung bzw. \perp zur Schubbeule entsprechend Abb. 4.37 dargestellt. Als Pfadparameter s wurde wieder die größte Durchbiegung der Schubbeule in Plattenmitte gewählt. Auch in diesem Fall stimmen das asymptotische Ergebnis und die „genauere“ numerische Pfadverfolgungslösung gut überein.

Die Verfolgung des sekundären Pfades wurde bei $\lambda = 10.333 = 1.304\lambda^c$ abgebrochen. Die verformte Struktur für die letzte berechnete Laststufe ist in Abb. 4.40 zu sehen. Die Ansicht ist dabei 15-fach, die Draufsicht 150-fach überhöht. Deutlich ist, neben \hat{q}^p , der Einfluß der quadratischen Verschiebungskorrektur \tilde{q}^\perp auf die Verformungen in Plattenebene zu sehen.

Als überkritische Tragfähigkeiten wurden anhand von Mises - Vergleichsspan-

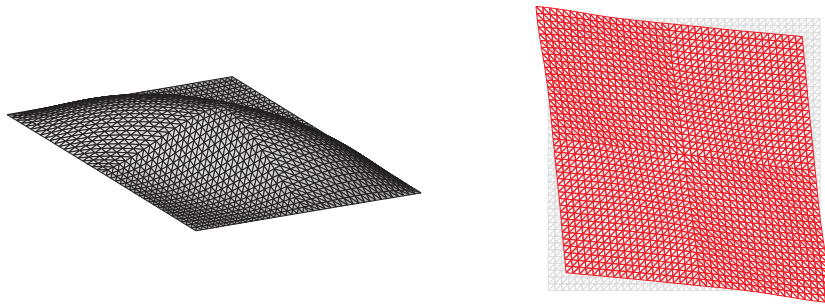


Abbildung 4.40: Beulverformungen, $\lambda = 10.33$

nungen ermittelt:

$$\begin{aligned} f_y = 24.0 \text{ kN/cm}^2: \quad \lambda^{24}/\lambda^c &= 1.100 & (\tilde{\lambda}^{24}/\lambda^c &= 1.111) \\ f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2: \quad \lambda^{36}/\lambda^c &= 1.272 & (\tilde{\lambda}^{36}/\lambda^c &= 1.396). \end{aligned}$$

Mit $\tilde{\lambda}$ sind die überkritischen Tragfähigkeiten bezeichnet, die sich aus dem approximierten Pfadverlauf ergeben würden. Für $f_y = 24.0 \text{ kN/cm}^2$ ist eine gute Übereinstimmung, für $f_y = 36.0 \text{ kN/cm}^2$ eine $\approx 10\%$ -ige Überschätzung der Tragreserve zu verzeichnen.

4.5 Beulen von kreiszylindrischen Schalensegmenten

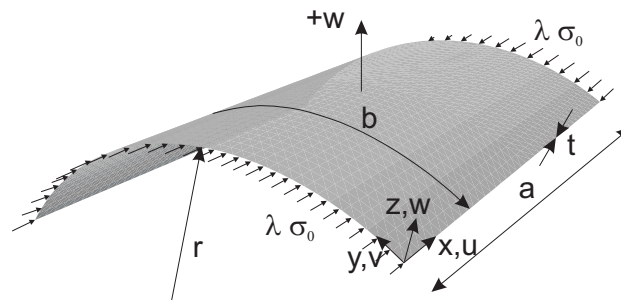


Abbildung 4.41: Kreiszylindrisches Schalensegment

Kreiszylindrische Schalensegmente nach Abb. 4.41, so genannte „Panel“, sind unter axialem Druck stabilitätsgefährdet. Das Ausbeulen solcher Segmente stellt nicht nur ein theoretisch interessantes Stabilitätsproblem dar, sondern besitzt auch eine praktische Bedeutung, da kreiszylindrische Schalensegmente als Teile komplexerer Ingenieurkonstruktionen auftreten.

Hierzu gehören längsversteifte Kreiszylinderschalen nach Abb. 4.42, wie sie im Behälterbau und in der Meerestechnik verwendet werden. Längssteifen erhöhen wesentlich die Stabilität axialdruckbelasteter Kreiszylinderschalen und stellen im Allgemeinen auch die wirtschaftlichere Lösung gegenüber einer Wanddickenvergrößerung dar. Schalensegmente werden in dieser Anwendung als **zylindrische Teilschalenfelder** bezeichnet.

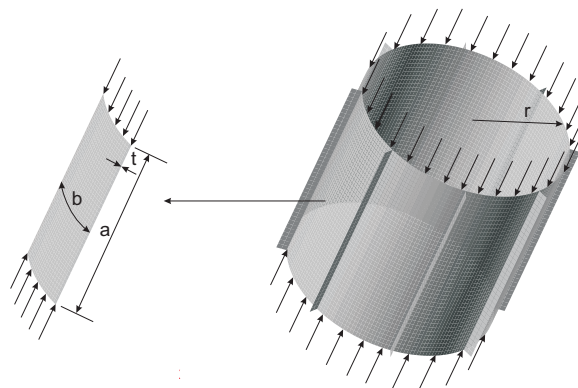


Abbildung 4.42: Längsversteifte Kreiszylinderschale

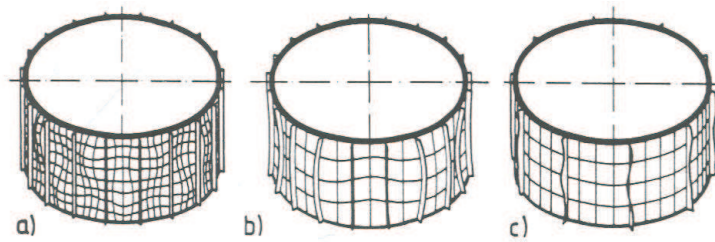


Abbildung 4.43: Stabilitätsprobleme längsversteifter KZS aus [13]

Bei längsversteiften KZS erfolgt das Schalenbeulen, eine ausreichende Biege- und Torsionssteifigkeit der Längssteifen vorausgesetzt, als lokales Ausbeulen der Teilschalenfelder zwischen den Steifen. Im praktischen Stabilitätsnachweis, z.B. [12] oder [13], wird deshalb eine ausreichende Beulsicherheit sowohl für das globale Beulen der gesamten Schale - Abb. 4.43 b) - als auch das lokale Ausbeulen einzelner Teilschalenfelder - Abb. 4.43 a) - gefordert. Ein lokales Beulen bzw. Drillknicken der Längssteifen nach Abb. 4.43 c) wird in der Regel durch eine ausreichende Steifigkeit ausgeschlossen.

Die Stabilitätsnachweise für längsversteifte KZS basieren, wie sämtliche Stabilitätsnachweise, auf einem halbempirischen Nachweiskonzept. Alternativ ermöglicht [13] auch eine numerische Stabilitätsanalyse, wobei man in der Regel nicht die gesamte Kreiszyinderschale, sondern nur Teilschalenfelder untersuchen wird. Hierbei stellt sich die Frage nach den zutreffenden Randbedingungen für das FE - Modell.

Zum Stabilitätsverhalten von kreiszyindrischen Schalensegmenten existiert in der Literatur bereits eine Reihe von Untersuchungen. Hervorzuheben sind umfangreiche analytische Untersuchungen in [64] und FE - Analysen in [16] und [24]. Das prinzipielle Stabilitätsverhalten längsversteifter axialdruckbelasteter KZS ist umfassend in [15] dargestellt. Für den überwiegenden Teil der vorliegenden numerischen Analysen ist jedoch festzustellen:

- a) Die Schalensegmente dienten lediglich als Referenzobjekt zur Veranschaulichung oder Überprüfung neuer bzw. effektiverer Finiter Schalenelemente oder modifizierter Analyseverfahren. Ein praktischer Bezug, beispielsweise zum Einsatz als Teilschalenfelder, ist selten vorhanden.
- b) Die Stabilitätsanalysen erfolgten in der Regel nur an zwei ausgewählten quadratischen Schalensegmenten mit den Krümmungsradien $r = 20$ oder $r = 33.33$, so dass eine Verallgemeinerung der gewonnenen Erkenntnisse kaum möglich ist.
- c) Es wurden häufig sehr spezielle Randbedingungen verwendet, um Vergleiche mit analytischen Ergebnissen zu ermöglichen. Dadurch verein-

fachten sich zwar die Stabilitätsuntersuchungen, aus praktischer Sicht sind diese Randbedingungen jedoch kritisch zu beurteilen.

- d) Die zum Teil gravierenden Unterschiede zwischen den numerischen Berechnungsergebnissen und analytischen Lösungen werden in der Regel nicht ausreichend diskutiert.

Unter Anwendung der im Kapitel 3 beschriebenen Methoden und Algorithmen wurde das Stabilitätsverhalten axialdruckbelasteter kreiszylindrischer Schalensegmente bzw. Teilschalenfelder untersucht. Dabei stand im Vordergrund der praktisch wichtige Fall des zylindrischen Teilschalenfeldes und nicht das, vor allem stabilitätstheoretisch interessante, allseitig gelenkig und radial unverschieblich gelagerte einzelne Schalensegment.

4.5.1 Systeme und Belastung

Die Analysen erfolgten für quadratische Schalensegmente nach Abb. 4.41, wobei die entlang des Segmentumfangs gemessene Breite b gleich der Schalensegmentlänge a ist. Der Krümmungsradius r wurde variiert, a und die Schalendicke t blieben konstant. Die Schalensegmente werden durch K^S , einen in [64] definierten Schalenparameter, gekennzeichnet:

$$K^S = \frac{a^2}{rt}.$$

Die untersuchten Schalensegmente lagen in einem Bereich $K^S = 1, 2 \dots 30$. Zur FE - Modellierung inkl. Randbedingungen wurde eine Befehlsabfolge im FE - Programm **SPang** erstellt, die eine automatische Modellgenerierung bei Vorgabe von K^S ermöglichte. Es wurden zwei Modellvarianten, ein Viertelsegment (M1) und ein vollständiges Segment (M2), bereitgestellt. Die Diskretisierung erfolgte durch geometrisch nichtlineare dreiknotige Platten - Membran - Elemente **GEOSHELL3n** [55]. Nach Voruntersuchungen wurden für alle Segmente folgende Diskretisierungen gewählt:

	Knoten	Elemente	Globale DOF's (ohne Randbed.)
Modell 1 (M1) 1/4 - Segment	676	1250	4056
Modell 2 (M2) vollständiges Segment	1681	3200	10086

Tabelle 4.2: Kennzahlen der verwendeten FE - Modelle

Die Auswahl des jeweiligen Modells richtete sich nach der Zulässigkeit für die Abbildung des Strukturverhaltens (M1!) und der Recheneffektivität.

Die physikalischen und geometrischen Größen betrugen einheitlich:

$$E = 2.1e + 4 \text{ kN/cm}^2, \quad \nu = 0.3, \quad t = 1.0 \text{ cm}, \quad a = 20 \text{ cm}.$$

Auch wenn es sich hier nicht um reale Abmessungen z.B. aus dem Behälterbau handelt, können die stabilitätstheoretischen Aussagen auf reale Konstruktionen übertragen werden. Die Festlegung der Modellabmessungen erfolgte hier aufgrund der zur Verfügung stehenden rechentechnischen Kapazitäten.

An den Lasträndern wurde entsprechend Abb. 4.41 in Längsrichtung eine gegengleiche Druckbeanspruchung aufgebracht, die in die Rechnungen als unveränderlicher, richtungstreuer globaler Lastvektor \mathbf{F} eingeht. Er wurde so kalibriert, dass am perfekten Schalensegment eine äußere konstante Druckbeanspruchung in axialer Richtung von $\sigma_0 = 1.0 \text{ kN/cm}^2$ vorlag. Die Belastung wurde linear über den Lastparameter λ gesteigert, somit gilt $\sigma = \lambda$. Andere Lastfälle, wie z.B. Druckbeanspruchung in Umfangsrichtung oder Schubbeanspruchung, wurden hier nicht untersucht.

Bei den geometrischen Randbedingungen ist einerseits zwischen den Randbedingungen an den Quer- bzw. Lasträndern und den Längsrändern, andererseits zwischen Membran- und Biegerandbedingungen zu unterscheiden. Folgende Randbedingungskombinationen (**RB**) wurden berücksichtigt:

	Lastränder	Längsränder
RB P1	$n_x = n_{xy} = w = w_{,xx} = 0$	$n_y = n_{yx} = w = w_{,yy} = 0$
RB P2	$n_x = v = w = w_{,xx} = 0$	$n_y = u = w = w_{,yy} = 0$
RB F1	$n_x = v = w = w_{,xx} = 0$	$n_y = u = w = w_{,y} = 0$
RB F2	$n_x = v = w = w_{,xx} = 0$	$n_{yx} = v_{,x} = w = w_{,y} = 0$
RB F3	$n_x = v = w = w_{,xx} = 0$	$u = v_{,x} = w = w_{,y} = 0$

Tabelle 4.3: Übersicht über die verwendeten Randbedingungskombinationen

Bei **P1** und **P2** waren die Schalensegmente allseitig gelenkig gelagert, in den Fällen **F1** - **F3** die Längsränder in Längsrichtung eingespannt. Die Bedingungen $n_x = 0$ bzw. $n_y = 0$ stehen für eine freie „Verwölbung“ der Last- bzw. Längsränder, n_{xy} bzw. n_{yx} kennzeichnen die Schubrandbedingungen.

In allen Fällen wurde eine Unverschieblichkeit der Segmentränder in radialer Richtung realisiert ($w = 0$). Dies war innerhalb der Modellierung mit erheblichem Aufwand verbunden und konnte nur näherungsweise anhand von Rand - Normalenvektoren erfolgen. Für ein Geradebleiben der Längsränder - $v_{,x} = 0$ - wurden zusätzliche geometrische Zwangsbedingungen in tangentialer Richtung aufgestellt.

4.5.2 Lineare Stabilitätsanalysen - Vorbetrachtungen

Im ersten Schritt der Untersuchungen erfolgten lineare Stabilitätsanalysen. Bevor auf die Ergebnisse eingegangen wird, sollen in Anlehnung an [15] einige Aspekte zur linearen Stabilität axialdruckbelasteter, vollständiger und unversteifter KZS dargestellt werden, die auch für die Interpretation der Ergebnisse zu den Schalensegmenten von großer Bedeutung sind.

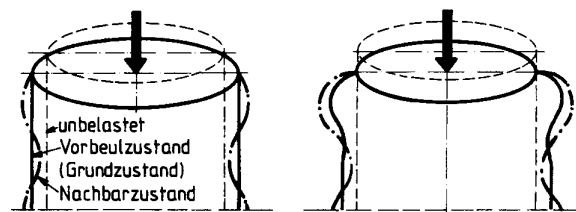


Abbildung 4.44: Klassischer (links) und realer, rotationssymmetrischer Vorbeulzustand (rechts) der vollständigen KZS nach [36]

Die klassische, ideale Beulspannung für die vollständige unversteifte KZS ergibt sich für $\nu = 0.3$ durch:

$$\sigma_{ki} = 0.605Et/r.$$

Es werden vorausgesetzt:

1. ein vollständig biegunsfreier Membranvorbeulzustand und
2. klassische Beulrandbedingungen.

In der klassischen linearen Beultheorie wird zwischen den Randbedingungen im Vorbeulbereich und den Randbedingungen des infinitesimal benachbarten Zustandes im kritischen Punkt, den Beulrandbedingungen, unterschieden.

Für 1. ist entlang der Ränder eine membrangerechte Lagerung entsprechend Abb. 4.44 (links) notwendig. Die Erfüllung von 2. erfordert eine radial und tangential unverschiebliche, gelenkige Lagerung, wie sie beispielsweise bei den in Tab. 4.3 als **RB P2** - **RB F3** bezeichneten Membran- und Biegerandbedingungen für den Lastrand vorliegen. Für den Vorbeulzustand sollen demnach andere Bedingungen als für den Nachbarzustand gelten. Auf diesen Widerspruch der linearen Beultheorie wird in [36] ausdrücklich hingewiesen.

Die Berücksichtigung realistischer, praxisnaher Randbedingungen wie nach Abb. 4.44 (rechts) führt zu zum Teil erheblichen Einbußen für σ_{ki} .

Nach [65] wird die ideale Beulspannung wesentlich von der Schubrandbedingung beeinflusst. Infolge der Beulrandbedingung $n_{xy} = 0$ ist eine etwa 50%ige Verringerung der Beulspannung der gelenkig gelagerten, vollständigen KZS zu verzeichnen. Wird ein rotationssymmetrischer, infolge Zwang an den Rändern durch $\nu \neq 0$ hervorgerufener Vorbeulzustand nach Abb. 4.44 (rechts) berücksichtigt, ergibt sich zusätzlich eine Abminderung der kritischen Beulspannung um etwa 15%.

Die ideale kritische Beulspannung eines quadratischen, gelenkig gelagerten kreiszylindrischen Schalensegmentes ist nach [64] für $\nu = 0.3$:

$$\sigma_{xSi} = 3.62 \frac{Et^2}{a^2} + \frac{a^2 E}{39.5r^2} \quad \text{für } 0 \leq K^S \leq 12$$

bzw.

$$\sigma_{xSi} = 0.605 E \frac{t}{r} \quad \text{für } K^S > 12.$$

Demnach liegen die idealen Beulspannungen nur für flache Segmente mit $K^S < 12$ über denen von vergleichbaren unversteiften KZS unter Axialdruck. Ähnliche analytische Formeln sind in [29] zu finden. Sie liefern dieselben kritischen Lasten.

Auch die Berechnungsformeln für σ_{xSi} gehen von einem reinen Membran - Vorbeulzustand und klassischen Beulrandbedingungen aus. Dafür wären exakt radiale Lagerungen ohne Behinderung der Querverformung und für den Nachbarzustand klassische Beulrandbedingungen sowohl an den Last- als auch an den Längsrändern - siehe **RB P2** nach Tab. 4.3 - notwendig.

Beim Sonderfall der zylindrischen Teilschalensegmente bestehen große Unterschiede zwischen den tatsächlichen und den nach der linearen Beultheorie vorausgesetzten Randbedingungen. Ähnlich wie bei der vollständigen KZS ist auch hier zu erwarten, dass solche Abweichungen vom membrangerechten Vorbeulzustand und/oder den klassischen Beulrandbedingungen an den Last- und hier zusätzlich an den Längsrändern erheblichen Einfluß auf die kritischen Lasten besitzen. Ob Einbußen für σ_{xSi} in ähnlichen Größenordnungen wie bei der vollständigen KZS auftreten, ist zu klären.

Die durchgeführten numerischen Analysen erfolgten randbedingungskonsistent, das heißt die nach Tab. 4.3 festgelegten Randbedingungen gelten sowohl für den Vorbeul- als auch für den Nachbarzustand.

4.5.3 Lineare Stabilitätsanalysen - RB P1, P2

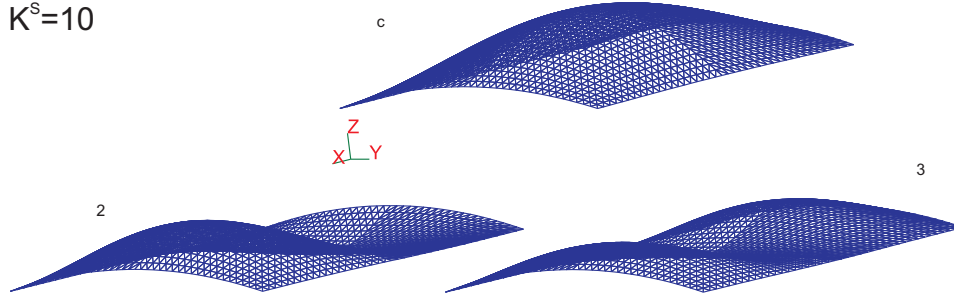


Abbildung 4.45: Beulformen Φ^c, Φ_2, Φ_3 , RB P1, $K^S = 10$

Es wurden zwei Fälle des allseitig gelenkig gelagerten Schalensegmentes untersucht: 1. das an Last- und Längsrändern ausschließlich radial unverschieblich (**RB P1**) und 2. das zusätzlich an Last- und Längsrändern tangential in Umfangs- bzw. Längsrichtung unverschieblich gelagerte Schalensegment (**RB P2**).

Für Teilschalenfelder ist zu berücksichtigen, dass die Längssteifen die Verformungsfähigkeit des Schalensegmentes an den Längsrändern wesentlich behindern. Beschränkt man sich im ersten Schritt auf den Einfluß der Steifen auf die Verschiebungen, ist festzustellen, dass aufgrund der in der Regel hohen Dehnsteifigkeit der Längssteifen eine freie Längsverschieblichkeit wie bei **RB P1** nicht gegeben ist. Für **RB P2** wurde die Steifenwirkung durch eine vollständige Verhinderung der tangentialen Verschieblichkeit in Längsrichtung berücksichtigt. Dasselbe gilt für die Lastränder in Umfangsrichtung, da dort im Allgemeinen Ringsteifen vorhanden sind. Damit wurden für **RB P2** sowohl an den Lasträndern als auch an den Längsrändern Randbedingungen verwendet, die den klassischen Beulrandbedingungen entsprechen.

Die Beulspannung σ_{xSi} bei membrangerechtem Vorbeulzustand und klassischen Beulrandbedingungen ergibt sich nach Abschn. 4.5.2. In [42] wird abweichend davon für alle K^S die erste Formel verwendet. Dies führt auf zum Teil erheblich höhere Beullasten als für die entsprechenden vollständigen unversteiften KZS (z.B. +14% bei $K^S = 20$).

Die numerische Bestimmung der kritischen Stabilitätspunkte λ^c erfolgte durch Anfangsstabilitätsanalysen anhand des verallgemeinerten Eigenproblems:

$$(K^0 + \lambda^c \Delta K) \Phi^c = K^c \Phi^c = 0.$$

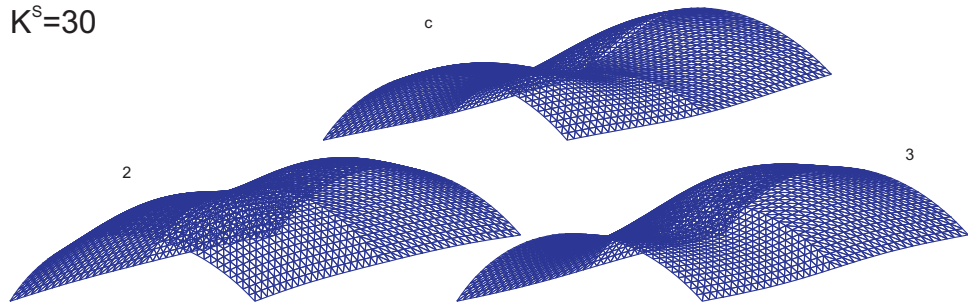


Abbildung 4.46: Beulformen Φ^c , Φ_2 , Φ_3 , **RB P2**, $K^S = 30$

$\Delta \mathbf{K}$ enthält die Steifigkeitsänderung zwischen der Initialsteifigkeit \mathbf{K}^0 und der Steifigkeit nach einem linear berechneten Schritt für $\Delta \lambda = 1.0$. Im Gegensatz zur klassischen Vorgehensweise werden dadurch näherungsweise auch Vorbeulverformungen berücksichtigt.

Es wurden jeweils die 3 niedrigsten kritischen Punkte mit den dazugehörigen Beulformen, Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 , ermittelt. In Abb. 4.45 und Abb. 4.46 sind einige Beulformen dargestellt. Der niedrigste Eigenwert und Eigenvektor wird im Weiteren mit λ^c bzw. Φ^c bezeichnet. Alle Ergebnisse für $K^S = 1 - 30$ einschließlich der Charakteristik der auftretenden Beulformen enthält Anhang D.2.

Im Ergebnis der linearen Stabilitätsanalysen läßt sich feststellen:

- a) Bei **RB P1** ergibt sich für alle K^S , dass die Beulformen Φ^c , Φ_2 , Φ_3 in Umfangsrichtung eine, in Längsrichtung jeweils eine, zwei bzw. drei Beulhalbwellen aufweisen. Für kleine Krümmungen liegt λ^c in der Nähe der Beulspannung der ebenen Platte ($\sigma_{Pi} = 189.80 \text{ kN/cm}^2$). Die Abstände des zweiten und des dritten kritischen Punktes zu λ^c verringern sich mit zunehmendem K^S . Der zweite kritische Punkt liegt zwischen 50 – 30%, der dritte kritische Punkt zwischen 160 – 90% oberhalb λ^c .
- b) **RB P2** führt zu einer deutlichen Anhebung von λ^c um 35 – 80% bei steigendem K^S . Gleichzeitig verringert sich jedoch der Abstand der beiden höheren kritischen Punkte zu λ^c wie auch der Unterschied zwischen diesen. Dies hat zur Folge, dass sich für größere Krümmungen die ersten drei kritischen Stabilitätspunkte auf ähnlichen Lastniveaus einstellen, zum Teil beträgt der Unterschied weniger als 10%. Im Ergebnis können sich die Beulformen gegenüber **RB P1** ändern, siehe Abb. 4.46.

4.5.4 Lineare Stabilitätsanalysen - RB F1, F2, F3

Für eine realistische Abbildung eines Teilschalensfeldes als FE - Modell sind, neben dem Einfluß der Längssteifen auf die Verschiebungen, auch die Auswirkungen der Versteifungen auf die Biegerandbedingungen zu berücksichtigen. Die Schalenhaut ist zwar elastisch in die Längssteifen eingespannt, jedoch besitzen die Längssteifen in der Regel eine hohe Torsionssteifigkeit. Deshalb wurde als Grenzfall bei den **RB F1, F2, F3** eine volle Einspannung der Längsränder in Axialrichtung angesetzt. An den Lasträndern wurden die klassischen Beulrandbedingungen beibehalten.

Als Verschiebungsrandbedingungen wurden für die Längsränder bei **RB F1** die klassischen Beulrandbedingungen, bei **RB F2** und **RB F3** zusätzliche geometrische Zwangsbedingungen verwendet. Diese sollten ein, infolge der Längssteifen praktisch vorhandenes, Geradebleiben bewirken ($v_{,x} = 0$).

In Abb. 4.47 ist eine Auswahl der Beulformen für verschiedene K^S für **RB F2** dargestellt. Ausführliche Ergebnisübersichten zu den berechneten kritischen Lastniveaus und den Beulformen sind wiederum in Anhang D.2 zu finden. Zusammenfassend läßt sich Folgendes feststellen:

- a) Für alle K^S ist eine Zunahme der Beullasten gegenüber den gelenkig gelagerten Segmenten zu verzeichnen. Vergleicht man die Ergebnisse der, bis auf die Längsrandeinspannung gleichen, Randbedingungen **RB P2** und **RB F1**, ist eine Erhöhung der niedrigsten kritischen Beullasten um bis zu 60% festzustellen. Ab etwa $K^S = 15$ fällt dieser Zuwachs jedoch geringer aus, bei stark gekrümmten Schalensegmenten verschwindet der beullasterhöhende Einfluß der Längsrandeinspannung fast vollständig.
- b) $v_{,x} = 0$ an den Längsrändern führt ebenfalls zu einer Erhöhung der Beullasten. Ein Vergleich der Ergebnisse für **RB F1** und **RB F3** zeigt, dass bis $K^S = 15$ ein Zuwachs von bis zu 40% zu verzeichnen ist, der für $K^S > 15$ konstant bleibt.
- c) Nur bei weniger gekrümmten Segmenten werden die Beullasten durch die Schubrandbedingung $n_{yx} \neq 0$ wesentlich angehoben. Bei zunehmendem K^S verliert auch diese Längsrandbedingung an Einfluß.
- d) Wie schon bei **RB P2** existieren auch hier nur geringe Abstände von λ^c zu λ_2 bzw. λ_3 . Speziell bei **RB F1** sind zum Teil sehr dicht beieinander liegende kritische Punkte vorhanden.

Hinsichtlich der Beulformen ergibt sich im Gegensatz zu den gelenkig gelagerten Segmenten kein einheitliches Bild für den gesamten Parameterbereich K^S . Festzustellen ist lediglich die Tendenz zu höherwelligen Eigenformen, wobei die Beulen zum Teil nicht auf die Axialrichtung beschränkt bleiben.

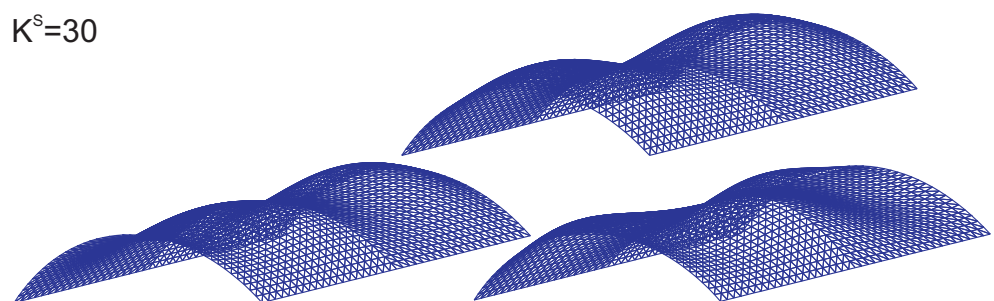
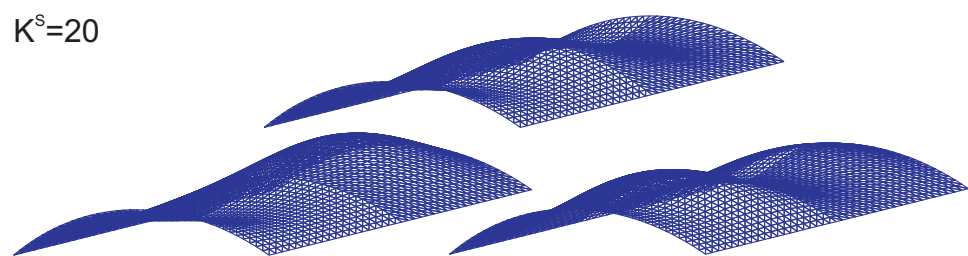
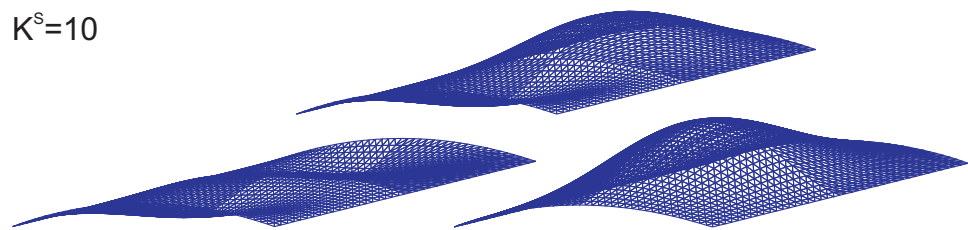
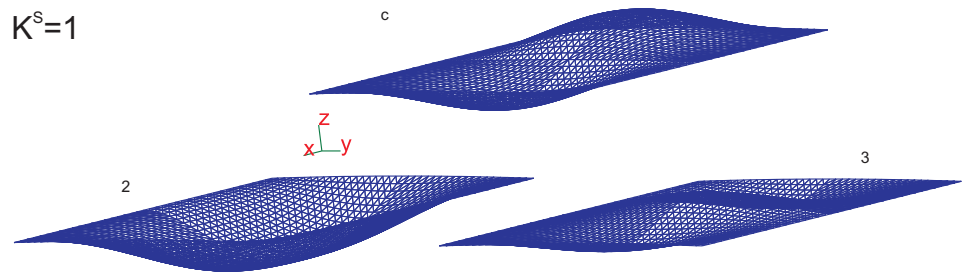


Abbildung 4.47: Beulformen Φ^c , Φ_2 , Φ_3 , **RB F2**, $K^S = 1, 10, 20, 30$

4.5.5 Diskussion der Ergebnisse zur linearen Stabilität

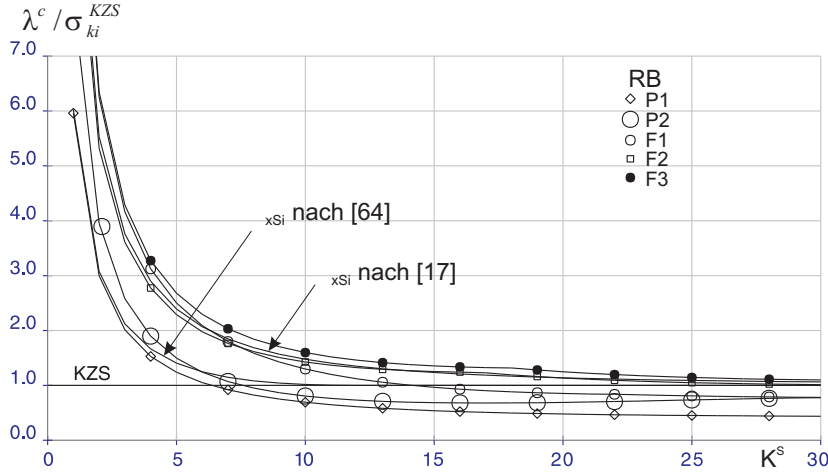


Abbildung 4.48: Vergleich von analytisch und numerisch ermittelten Beullasten für Schalensegmente

In Abb. 4.48 sind die ermittelten kritischen Punkte λ^c für verschiedene Randbedingungen und im Vergleich zu den klassischen idealen Beulspannungen σ_{ki}^{KZS} für die vollständige unausgesteifte KZS dargestellt. Neben der schon angegebenen Lösung aus [64] für Schalensegmente mit klassischer Beulrandbedingung und gelenkiger Lagerung sind die Beulspannungen nach der folgenden empirischen Formel aus [17] eingezeichnet:

$$\sigma_{xSi} = 0.605 \sqrt{1 + 0.076(2\pi r/a)^4 / (r/t)^2} Et/r.$$

Diese Formel setzt voraus, dass das Teilschalenfeld unendlich lang ist und damit die Einflüsse der Randbedingungen an den Lasträndern - z.B. evtl. Biegeeingspannungen - vernachlässigbar sind. Weiterhin sollen die Längsränder biegeeingespannt sein. Diese Formel wird im baupraktischen Nachweis für die längsversteifte Kreiszyinderschale [13] verwendet und ergibt $\sigma_{xSi}/\sigma_{Ki}^{KZS} > 1.0$ für alle K^S . Im Gegensatz zu [64] fällt die Beulspannung nach obenstehender Formel für $K^S > 12$ erst allmählich auf das Niveau der vollständigen Kreiszyinderschale ab.

In Abb. 4.48 ist zu sehen, dass im Gegensatz zu [64] bzw. [17] die numerisch ermittelten Beullasten teilweise auch unterhalb σ_{Ki}^{KZS} liegen. Dies gilt schon für geringe Krümmungen in den Fällen **RB P1** und **RB P2**, für stärker gekrümmte Schalensegmente auch bei **RB F1**. Die numerisch ermittelten Beulspannungen σ_{xSi} betragen zum Teil nur 1/3 von σ_{ki}^{KZS} . Lediglich bei **RB F2** und **RB F3**, wo außer der Längsrandeinspannung auch ein Geradebleiben der Längsränder erzwungen wurde, gilt $\lambda^c > \sigma_{ki}^{KZS}$ für alle K^S .

Eine relativ gute Übereinstimmung ist allein zwischen der Lösung nach [17] und den Ergebnissen für **RB F2** über den gesamten untersuchten Parameterbereich K^S festzustellen. Im Fall der gelenkig gelagerten Segmente sind für mittlere und größere Krümmungen die Ergebnisse bei **RB P2** zwar näher an der analytischen Lösung nach [64] als mit **RB P1**, trotzdem sind auch hier bis zu 30% kleinere Beullasten gegenüber σ_{ki}^{KZS} ermittelt worden. Die Ergebnisse für **RB F1** liegen zwar für weniger gekrümmte Segmente noch im Bereich der Lösung nach [17], für $K^S > 10$ ist diese Übereinstimmung jedoch nicht mehr vorhanden.

In der Tendenz stimmen numerisch und analytisch ermittelte Beullasten darin überein, dass mit fallender Krümmung der Segmente die Beullasten gegenüber σ_{ki}^{KZS} stark ansteigen und ein Übergang zum Plattenbeulen erfolgt.

Die offensichtlichen Unterschiede zwischen analytisch und numerisch ermittelten Beullasten besitzen verschiedene Ursachen, die jedoch nur schwer voneinander zu trennen sind. Im Einzelnen muß berücksichtigt werden:

1. In der numerischen linearen Stabilitätsanalyse wurden die Randbedingungen während der Berechnung nicht verändert. Damit existiert hier kein Unterschied zwischen den Randbedingungen des Vorbeul- und des Nachbarzustandes. Dies bedeutet, dass im Gegensatz zur linearen Beultheorie die tatsächlichen Randbedingungen nicht erst bei der Ermittlung der Beullast und der Beulform berücksichtigt werden.
2. Die Abbildung der Geometrie und der Randbedingungen kann im FE - Modell nur näherungsweise erfolgen. Beispielsweise läßt sich aufgrund der Geometrieapproximation eine radiale Verschiebungshalterung an den Schalenrändern nicht exakt realisieren.
3. Im verwendeten Eigenproblem zur Ermittlung von λ^c werden Vorbeulverformungen berücksichtigt. Diesem Vorgehen würde innerhalb der Beultheorie eine näherungsweise Berücksichtigung des aus $\nu \neq 0$ resultierenden rotationssymmetrischen Vorbeulzustandes entsprechen. Die Vorbeulverformungen der Schalensegmente setzen sich aus Membran- und Biegeverformungen zusammen. Hierbei ist zwischen planmäßigen und künstlichen, allein infolge der FE - Modellierung auftretenden Vorbeulverformungen zu unterscheiden. Planmäßig sind in allen untersuchten Fällen die Membranvorbeulverformungen. Bei **RB P2, F1, F2, F3** sind planmäßig keine membrangerechten Lagerungen vorhanden, so dass zusätzliche Biegevorbeulverformungen auftreten. Hinzu kommen ungewollte Biegevorbeulverformungen aufgrund unvermeidbarer Ungenauigkeiten im FE - Modell (siehe 2.), die auch bei **RB P1** vorhanden sind. Es kann aber davon ausgegangen werden, dass in den Fällen, in denen planmäßige Biegevorbeulverformungen vorliegen, der

Anteil der ungewollten gegenüber den planmäßigen Biegevorbeulverformungen gering ist.

Nach diesen Überlegungen stellt sich die Frage, welche Bedeutung die numerisch ermittelten kritischen Punkte haben bzw. welche kritischen Zustände mit der verallgemeinerten Eigenanalyse tatsächlich approximiert werden.

Dieses Problem wird deutlicher, wenn an den kritischen Punkten das Produkt $\mathbf{F}^T \Phi^c$ überprüft wird. Die analytisch berechneten Beullasten stellen voraussetzungsgemäß Verzweigungspunkte dar. Für die numerisch ermittelten kritischen Punkte müßte dann $\mathbf{F}^T \Phi^c \approx 0$ gelten. In Anhang D.2 ist dieses Produkt für jeden berechneten Fall ausgewertet. Nur bei **RB F1, F2, F3** können die kritischen Punkte bis etwa $K^S = 16$ eindeutig als Verzweigungspunkte identifiziert werden. Zur Interpretation dieser Ergebnisse ist es notwendig, nichtlineare Stabilitätsanalysen durchzuführen und die primären Last - Verformungspfade zu ermitteln.

4.5.6 Primäre Pfade - RB P1

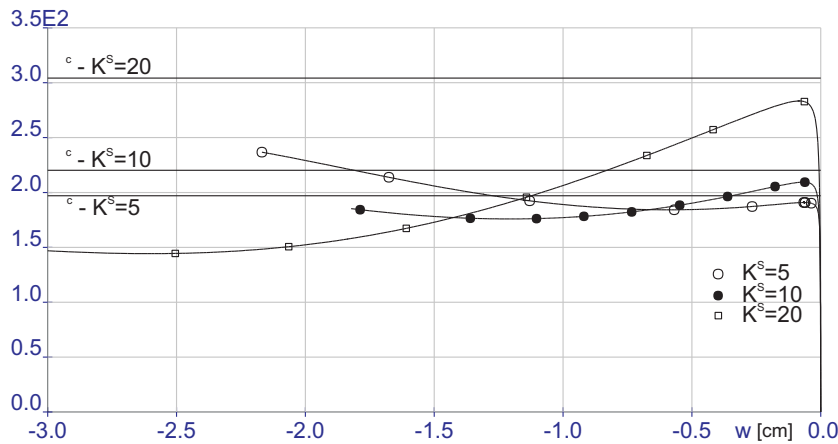


Abbildung 4.49: Ausgewählte Primärpfade, **RB P1**

Die Ermittlung der primären Last - Verformungspfade erfolgte mit dem Bogenlängenalgorithmus `critical-point.s` aus Anhang C. Begleitend zur Pfadverfolgung wurde der kleinste Standardeigenwert kontrolliert. Dieses Vorgehen wird in der Ingenieurpraxis als nichtlineare Stabilitätsanalyse, ein evtl. auftretender kritischer Stabilitätspunkt als idealer nichtlinearer Beulwiderstand [13] bezeichnet. Ein nichtlinearer Beulwiderstand kann ein Verzweigungs- oder Durchschlagspunkt sein.

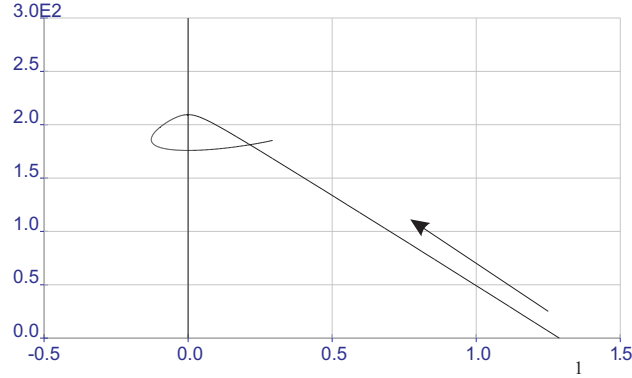


Abbildung 4.50: Verlauf des 1. Standardeigenwertes entlang des Primärpfades, $K^S = 10$

Abb. 4.49 zeigt die Verläufe der primären Pfade für $K^S = 5, 10, 20$ anhand der Durchbiegung in Segmentmitte. Die Pfade verlaufen anfangs linear, bei Annäherung an λ^c zunehmend nichtlinear. Neben der Stauchung des Segmentes ist von Beginn an eine anfangs geringe, später stark zunehmende Ausbiegung zum Krümmungsmittelpunkt hin zu beobachten. Dieser Effekt verstärkt sich mit wachsendem K^S . Die primären Pfade erreichen ein Lastmaximum λ_{nl}^c , das unterhalb, aber in der Nähe von λ^c liegt. Anschließend ist bei wachsender Verformung ein Abfall auf ein Lastminimum und ein darauffolgender Lastanstieg zu verzeichnen. Dieses Verhalten, das charakteristisch für ein Durchschlagsproblem ist, stellt sich für alle K^S ein.

Der Verlauf des 1. Standardeigenwertes ω_1 nach Abb. 4.50 weist zwei Nulldurchgänge, am Lastmaximum und -minimum, auf. Durch $\omega_1 > 0$ oder $\omega_1 < 0$ wird die Stabilität bzw. Instabilität der entsprechenden Pfadabschnitte angezeigt.

Aus dem Pfadverlauf ist offensichtlich, dass es sich bei den kritischen Punkten um Durchschlagspunkte handelt. Der zum Lastmaximum gehörende Singulärvektor Φ_{nl}^c stellt sich in allen Fällen wie Φ^c einwellig in Umfangs- und Längsrichtung dar. Stabilitätstheoretisch ergibt die Klassifizierung, z.B. für $K^S = 10$ bei $\lambda_{nl}^c = 209.44$, Folgendes:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \Phi_{nl}^c = 0.00852 \neq 0 & \quad \rightarrow \quad \text{Durchschlagspunkt} \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} = 0 \\ A = -0.035612 & \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} = \alpha^2 \frac{A}{\mathbf{F}^T \Phi_{nl}^c} = -\alpha^2 4.1797. \end{aligned}$$

Unabhängig von α ist $\dot{\lambda} < 0$. Damit handelt es sich bei λ_{nl}^c um einen **Durchschlagspunkt** mit einem **Lastmaximum**. Entsprechende Untersuchungen

am Lastminimum bestätigen, dass auch dort ein Durchschlagspunkt vorliegt. Hier ergibt sich dann $\dot{\lambda} > 0$.

Die Verformungen der Struktur entlang des primären Pfades sind gekennzeichnet durch ein sowohl in Umfangs- als auch in Längsrichtung einwelliges Beulmuster. In Abb. 4.51 ist die verformte Struktur im Lastminimum dargestellt. Die Strukturverformung entspricht qualitativ im Wesentlichen dem Singulärvektor Φ^c aus der linearen Stabilitätsanalyse.

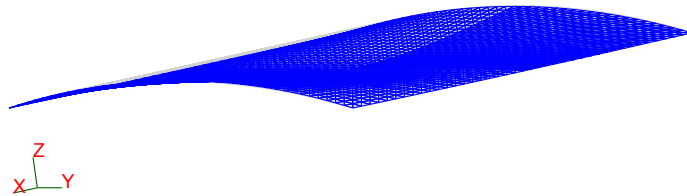


Abbildung 4.51: Verformte Struktur im Lastminimum (nicht überhöht), $K^S = 10$

Theoretisch hätte sich bei den vorliegenden Randbedingungen ein linearer Primärpfad mit einem Verzweigungspunkt einstellen müssen. Der nichtlineare Verlauf des primären Pfades resultiert hier aus Biegestörungen, auf die schon in Abschn. 4.5.5 hingewiesen wurde. Diese nicht planmäßigen Biegestörungen ergeben sich dadurch, dass:

- die ursprünglich radiale Lagerung der Last- und Längsränder während der Pfadverfolgung infolge $\nu \neq 0$ verletzt wird. Zusätzliche tangentialer Halterungen werden aktiviert, die zu Biegebeanspruchungen führen. Sollen diese Störungen während der Pfadverfolgung ausgeschlossen werden, wären aufwändige, schrittweise Anpassungen der Randbedingungen vorzunehmen.
- das Schalensegment als FE - Modell geometrisch approximiert wird. Dadurch können keine exakt radialen Lagerungen der Segmentränder realisiert werden. Dies erzeugt zusätzliche kleine Biegestörungen, die aber im Allgemeinen gering sind. Auswirkungen solcher Modellimperfectionen wurden in [4] untersucht.

Eine lineare Stabilitätsanalyse in der verwendeten Form geht von einem linearen Primärpfad aus. Die vorstehenden Untersuchungen verdeutlichen, dass es sich dabei, bezogen auf das Verhalten des FE - Modells, um einen fiktiven Pfad handelt. Die kritischen Punkte $(\lambda^c, \mathbf{q}^c)$ sind keine Gleichgewichtszustände der FE - Struktur. Es gilt:

$$\mathbf{G}(\mathbf{R}(\mathbf{q}^c), \lambda^c \mathbf{F}) \neq \mathbf{0}.$$

Hierbei sind $\mathbf{R}(\mathbf{q}^c)$ die Rückstellkräfte im kritischen Punkt. Die kritischen Punkte aus den linearen Stabilitätsanalysen sind demnach fiktive Verzweigungspunkte, die infolge des nichtlinearen Verlaufs des Primärpfades „verloren“ gehen. Da die nichtlinearen Beullasten jedoch in unmittelbarer Umgebung dieser Verzweigungspunkte liegen sowie Φ^c und die Strukturverformungen in λ_{nl}^c qualitativ übereinstimmen, können die Verzweigungspunkte als den Durchschlagsproblemen zugeordnete Gleichgewichtsverzweigungen interpretiert werden. Dies ermöglicht Nachbeuluntersuchungen nach Abschn. 4.5.8.

4.5.7 Primäre Pfade - RB F2

Von den Schalensegmenten mit eingespannten Längsrändern wurden für weitere Untersuchungen die Teilschalenfelder mit **RB F2** ausgewählt. In Abb. 4.52 sind hierfür die Verläufe der primären Pfade für $K^S = 5, 10, 20$ anhand der Durchbiegung in Segmentmitte dargestellt.

Die Primärpfade weisen folgende Charakteristik auf:

1. Schon bei geringen Laststufen ist, insbesondere bei flachen Teilschalenfeldern, ein stark nichtlinearer Verlauf ausgeprägt. Ursache dafür sind im Wesentlichen die planmäßigen Biegeverformungen infolge der gewählten Randbedingungen, siehe dazu Abschn. 4.5.5.
2. Die Pfade erreichen ein Lastmaximum λ_{nl}^c , das über λ^c , dem niedrigsten kritischen Lastniveau der linearen Stabilitätsanalyse, liegt. Während der Unterschied zwischen λ_{nl}^c und λ^c beim stark gekrümmten Teilschalenfeld $K^S = 20$ gering ausfällt, ist bei $K^S = 5$ mit $\lambda_{nl}^c = 578.30$ ein etwa 60%-iger Zuwachs gegenüber λ^c zu verzeichnen.
3. Die primären Pfade fallen nach λ_{nl}^c bei weiterer Zunahme der Verformungen ab, ohne jedoch wie im Fall **RB P1** ein Lastminimum zu erreichen.
4. Bei $K^S = 10$ und $K^S = 20$ existiert in Höhe von λ_{nl}^c ein größerer Pfadabschnitt bei annähernd konstantem Lastniveau und stark zunehmenden Verformungen. Dagegen tritt bei $K^S = 5$ nach λ_{nl}^c ein abrupter Abfall des Primärpfades auf.

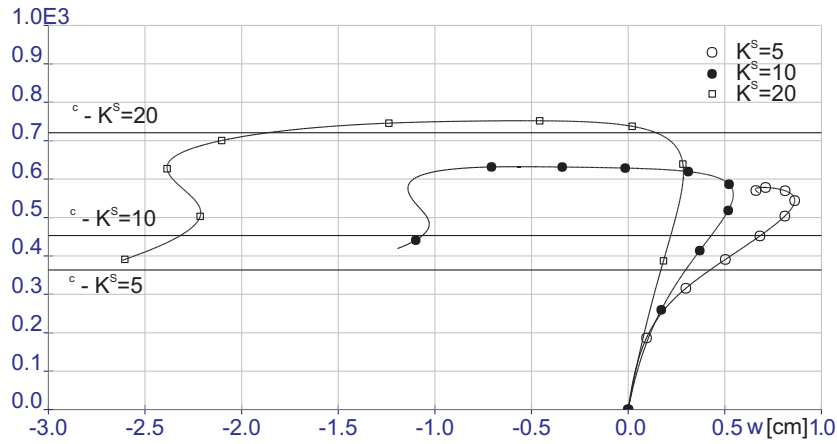


Abbildung 4.52: Ausgewählte primäre Pfade - **RB F2**

5. In allen Fällen kehrt sich die anfangs entgegen dem Krümmungsmittelpunkt des Segmentes gerichtete Verformung ($+w$) bei steigender Belastung zum Krümmungsmittelpunkt hin um ($-w$).

Die Verläufe der kleinsten Standardeigenwerte ω_1 zeigt Abb. 4.53. Bei λ_{nl}^c ist jeweils ein Nulldurchgang vorhanden. In den ω_1 - Verläufen sind Krümmungsänderungen, Abschnitte mit fallenden und wieder ansteigenden ω_1 - Werten sowie steile Abfälle zu erkennen. Daneben sind bei den flacheren Segmenten $K^S = 5$ und $K^S = 10$ in Höhe bestimmter Lastniveaus auffällige Knicke in der Kurve festzustellen. Bei $K^S = 5$ fällt der Abfall von ω_1 bei λ_{nl}^c besonders steil aus. Alle diese Erscheinungen sind auf allmähliche oder abrupte Steifigkeitsveränderungen der Struktur zurückzuführen, die durch ω_1

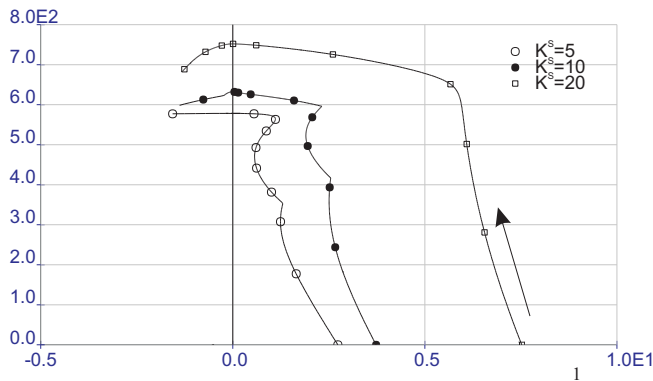


Abbildung 4.53: Verläufe der 1. Standardeigenwerte

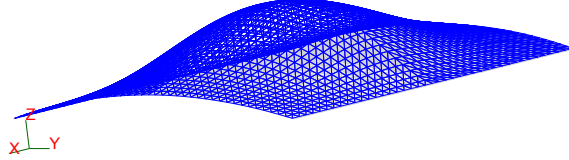


Abbildung 4.54: Φ_{nl}^c , $K^S = 10$

widergespiegelt werden. Für den Fall $K^S = 5$ wird darauf später noch einmal eingegangen.

Klassifizierung der kritischen Punkte

Für $K^S = 10$ und $K^S = 20$ ergibt die Untersuchung der kritischen Punkte λ_{nl}^c :

$$\underline{K^S = 10 : \quad \lambda_{nl}^c = 632.36}$$

$$\mathbf{F}^T \Phi_{nl}^c = -0.1375 \neq \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \text{Durchschlagspunkt} \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} = 0$$

$$A = 0.02394 \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} = \alpha^2 \frac{A}{\mathbf{F}^T \Phi_{nl}^c} = -\alpha^2 0.1742 < 0.$$

$$\underline{K^S = 20 : \quad \lambda_{nl}^c = 751.97}$$

$$\mathbf{F}^T \Phi_{nl}^c = -0.3418 \neq \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \text{Durchschlagspunkt} \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} = 0$$

$$A = 0.055297 \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} = \alpha^2 \frac{A}{\mathbf{F}^T \Phi_{nl}^c} = -\alpha^2 0.1618 < 0.$$

Damit handelt es sich für $K^S = 10$ und $K^S = 20$ bei λ_{nl}^c um **Durchschlagspunkte** mit einem **Lastmaximum**.

Die zugehörigen Singulärvektoren Φ_{nl}^c zeigen Abb. 4.54 bzw. Abb. 4.55. Während bei $K^S = 20$ Φ_{nl}^c und Φ^c ähnlich sind, gilt für $K^S = 10$ $\Phi_{nl}^c \neq \Phi^c$ (siehe Abb. 4.47). Der einwellige Singulärvektor Φ_{nl}^c entspricht hier Φ_3 aus der linearen Stabilitätsanalyse.

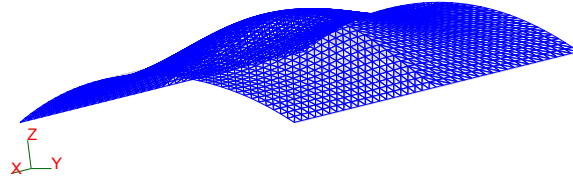


Abbildung 4.55: Φ_{nl}^c , $K^S = 20$

Für $K^S = 5$ ergibt die Analyse des kritischen Punktes λ_{nl}^c mit dem Algorithmus `postbuckling-symm.s` aus Abschn. 3.8.7:

$$\begin{aligned}
 & \underline{K^S = 5 : \quad \lambda_{nl}^c = 578.30} \\
 & \mathbf{F}^T \Phi_{nl}^c = 1.4783e - 10 \quad \rightarrow \quad \text{Verzweigungspunkt} \\
 & A = 1.7767e - 9 \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \text{symmetrisch} \\
 & B = -0.01916 \quad D = 0.96001 \quad E = -2.1798 \\
 & \rightarrow \quad \dot{\lambda} = -\alpha^2 \frac{D + 3E}{3B} = -\alpha^2 97.056 < 0.
 \end{aligned}$$

Bei $K^S = 5$ liegt demnach kein Durchschlagspunkt, sondern eine **instabil symmetrische Verzweigung** vor. Die in Abb. 4.56 dargestellte Beulform Φ_{nl}^c verläuft ebenso wie Φ^c zweiwellig in Längs- und einwellig in Umfangsrichtung.

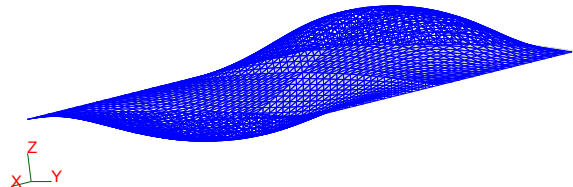


Abbildung 4.56: Φ_{nl}^c , $K^S = 5$

Interpretation der Ergebnisse

Die Unterschiede in den Ergebnissen aus linearen und nichtlinearen Stabilitätsanalysen für den Fall **RB F2** verdeutlichen die Problematik der Anwendung linearer Stabilitätsanalysen für Strukturen mit planmäßigen Biegeverformungen. Nur für $K^S = 20$ ergab die lineare Stabilitätsanalyse eine brauchbare Abschätzung für den niedrigsten kritischen Punkt. Bei $K^S = 5$ und $K^S = 10$ resultierten aus nichtlinearen Stabilitätsanalysen wesentlich höhere Beullasten. Neben den kritischen Lastniveaus sind zum Teil auch gravierende Unterschiede bei den Beulformen festzustellen.

Die Ursache für diese Abweichungen liegt in dem nichtlinearen Verlauf des Primärpfades, der hier im Wesentlichen durch planmäßige Biegeverformungen hervorgerufen wird. Existieren im Vorbeulbereich neben den Membran- auch große Biegeverformungen, sind starke Veränderungen der Steifigkeitsverhältnisse zu erwarten. Der ω_1 - Verlauf repräsentiert dabei die Steifigkeitsentwicklung im Vorbeulbereich. Lineare Stabilitätsanalysen, die immer von einer linearen Änderung der Steifigkeitsverhältnisse zwischen einem Grundzustand und dem extrapolierten kritischen Stabilitätszustand ausgehen, können die hier tatsächlich auftretenden nichtlinearen Steifigkeitsänderungen nicht oder nur unzureichend erfassen.

Bei $K^S = 20$ beeinflussen aufgrund der großen Segmentkrümmung die veränderten Randbedingungen an den Längsrändern in geringerem Maße den Membranvorbeulzustand, so dass hier eine lineare Stabilitätsanalyse noch befriedigende Ergebnisse liefert. Dies ist immer dann der Fall, wenn der kritische Stabilitätszustand hauptsächlich durch Membranverzerrungen hervorgerufen wird.

Für $K^S = 5$ sollen die geschilderten Zusammenhänge eingehender untersucht werden. Dafür sind in Abb. 4.57 noch einmal der Verlauf des Primärpfades und von ω_1 , zusammen mit den Lastniveaus der niedrigsten drei kritischen Punkte aus der linearen Stabilitätsanalyse, dargestellt. Abb. 4.58 zeigt die

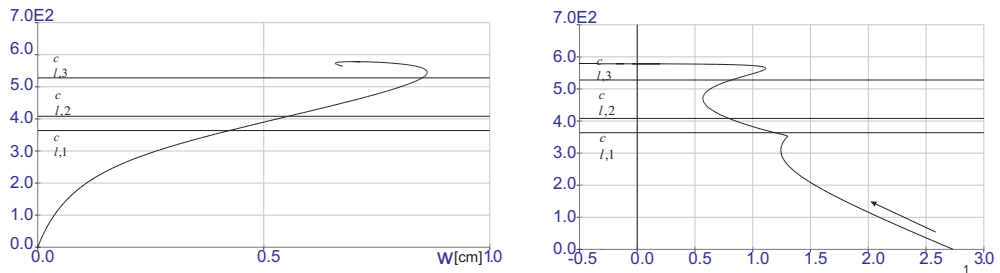


Abbildung 4.57: Verlauf des primären Pfades und von ω_1 , $K^S = 5$

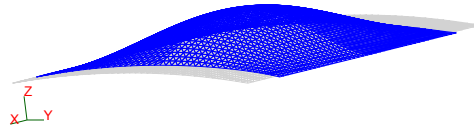


Abbildung 4.58: Verformte Struktur, $K^S = 5$, $\lambda \approx 0.2\lambda_{nl}^c$, 50 - fach

verformte Struktur im Vorbeulbereich weit unterhalb von λ_{nl}^c , bei $0.2\lambda_{nl}^c < \lambda^c$.

Im Vorbeulbereich sind neben den Membran- auch starke Biegeverformungen vorhanden. Die Verformungsfigur ist einwellig in Längs- und Umfangsrichtung und entgegen dem Krümmungsmittelpunkt gerichtet ($+w$). Die Biegeverformungen vergrößern die Segmentkrümmung, wodurch die Steifigkeit erhöht wird. Dieser Effekt wirkt der aus dem Membrandruckzustand resultierenden Steifigkeitsverringerung entgegen. Im ω_1 - Verlauf zeigt sich dieses Verhalten darin, dass sich der Abfall von ω_1 bei zunehmender Nichtlinearität des Primärpfades deutlich abschwächt.

Im ω_1 - Verlauf folgt anschließend, etwa in Höhe von λ^c , ein markanter Knick, der als eine „Spur“ eines kritischen Stabilitätszustandes gedeutet werden kann. Erfahrungsgemäß markieren dabei solche Knicke „benachbarte“ - Stabilitätsprobleme. Es handelt sich hierbei um solche Stabilitätsprobleme, die nicht auf dem tatsächlichen Primärpfad liegen. Jedoch unterscheiden sich die aktuellen Konfigurationen, das heißt die Verformungs- und Spannungsverteilungen auf diesen Lastniveaus, nur wenig von den Zuständen, die zu den „benachbarten“ Stabilitätsproblemen führen würden. Im konkreten Fall handelt es sich um einen „benachbarten“ kritischen Membranspannungszustand (λ^c , Φ^c). Dieser Zustand wird hier nicht maßgebend, da die Struktur Steifigkeitsreserven besitzt, durch die dieser Zustand „aufgefangen“ werden kann.

Auch der Primärpfad weist etwa in Höhe von λ^c eine Krümmungsänderung auf. Die Verformung erhält eine rückläufige, zum Krümmungsmittelpunkt hin gerichtete Tendenz. Das deutet auf den Einfluß der einwelligen Beulform Φ_2 hin. Die Verformungsfigur für $\lambda > \lambda^c$ ist weiterhin einwellig in Umfangs- und Axialrichtung. Ein Einfluß der in Längsrichtung zweiwelligen Beulform Φ^c ist nicht festzustellen.

Dies läßt darauf schließen, dass tatsächlich bei $\approx \lambda^c$ eine Änderung im Stabilitätsverhalten auftritt, die maßgebliche Beulform mit Φ^c jedoch nicht zutref-

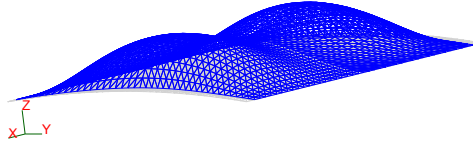


Abbildung 4.59: Verformte Struktur, $K^S = 5$, $\lambda = \lambda_{nl}^c$, 2 - fach

fend ermittelt wurde. Auch im weiteren Verlauf bis λ_{nl}^c ist nur der Einfluß der dreiwelligen Beulform Φ_3 festzustellen. Die verformte Struktur bei λ_{nl}^c zeigt Abb. 4.59. Danach existiert bei λ_{nl}^c eine Kombination aus einer einwelligen primären Verformung ($+w$), Φ_2 und Φ_3 .

Dieses Zusammenwirken verschiedener Verformungszustände führt im vorliegenden Fall jedoch gerade zu einer kritischen Konfiguration. Die Überlagerung der in Längsrichtung einwelligen mit der dreiwelligen Beulform führt zu einem Ausgleich der Biegeverzerrungen, so dass sich ein kritischer Membranzustand einstellen kann. Er führt zu einer Gleichgewichtsverzweigung mit dem Beulvektor Φ_{nl}^c nach Abb. 4.56. Erst auf dem Lastniveau von λ_{nl}^c , das etwa in Höhe von λ_3 liegt, kommt es demnach zu dem kritischen Zustand, der in der linearen Analyse schon für λ^c abgeschätzt wurde.

Für die längsrandeingespannten Schalensegmente kann damit zusammenfassend festgestellt werden, dass lineare Stabilitätsanalysen hier keine zuverlässigen Aussagen zu den kritischen Stabilitätspunkten und den relevanten Beulformen liefern. Aus praktischer Sicht ist die teilweise starke Unterschätzung der Beullast durch λ_c und eine Umordnung der Beulformen hervorzuheben. Kritische Stabilitätspunkte lassen sich in diesen Fällen zuverlässig nur durch eine nichtlineare Stabilitätsanalyse ermitteln. Da es sich jedoch, wie gezeigt, bei den kritischen Punkten aus einer linearen Stabilitätsanalyse um „benachbarte“ kritische Zustände handeln kann, sind auch diese Ergebnisse, insbesondere für Imperfektionsanalysen, zu beachten.

4.5.8 Asymptotische Nachbeulanalyse

Aus den vorangegangenen Untersuchungen wurde deutlich, dass Nachbeulanalysen, die auf den Ergebnissen von linearen Stabilitätsuntersuchungen aufbauen, nur für Segmente mit den **RB P1** bzw. **P2** sinnvoll sind. Unter Anwendung der Verfahren aus Abschn. 3.6 können die kritischen Punkte λ^c klassifiziert werden. Dabei wird vernachlässigt, dass es sich, bezogen auf das Last - Verformungsverhalten des FE - Strukturmodells, nur um theoretische Verzweigungspunkte handelt. Das Nachbeulverhalten wäre dann zwar ebenso konstruiert. Infolge der Nähe zwischen Modell- und tatsächlichem Strukturverhalten sind dennoch Rückschlüsse auf das tatsächliche Nachbeulverhalten möglich.

Aufgrund der doppelt symmetrischen Beulformen Φ^c bei **RB P1** bzw. **P2** konnten die Nachbeulanalysen am Modell M1 erfolgen.

Die linearen Stabilitätsanalysen lieferten die auf die Länge 1 normierten Singulärvektoren Φ^c und die kritischen Lastparameter λ^c , siehe Anhang D.2. Als weitere Eingangsgröße wurde \hat{q}_0^p , die Tangente an den Primärpfad im Pfadursprung, bestimmt. Die Nachbeulgrößen λ , $\dot{\lambda}$, $\dot{\hat{q}}$ wurden mit dem Algorithmus `postbuckling-asymm.s` aus Abschn. 3.8.6 berechnet, als spezielle Lösung für \tilde{q} wurde \hat{q}_0^p verwendet.

Beispielsweise ergab für $K^S = 5$ und **RB P1** eine Nachbeulanalyse:

$$\begin{aligned} & \underline{K^S = 5 : \quad \lambda^c = 196.97} \\ & A = 0.017465 \quad B = -0.003285 \quad C = 3.4364e - 7 \\ & A \neq 0 \rightarrow \text{asymmetrische Verzweigung} \rightarrow \dot{\lambda} = 2.658 \alpha \\ & \text{Normierung: } s = w(s) - w^c \rightarrow \alpha = 13.737 \\ & \dot{\lambda} = 36.512 \\ & D = 0.037309 \quad F = 1.4671e - 6 \quad G = 1.4819e - 5 \quad H = -3.3419e - 10 \\ & \dot{\lambda} = 61.323. \end{aligned}$$

Für die Normierung wurde die Durchbiegung in Segmentmitte verwendet. Der Parameter α läßt sich damit ermitteln aus:

$$\dot{w} = \Phi_w^c \alpha = 1.0.$$

Φ_w^c ist die Durchbiegungsordinate in Segmentmitte aus Φ^c . Aus der Normierung resultiert $\dot{w} = 0$ als weitere Zusatzbedingung für die Berechnung von $\dot{\hat{q}}$. In Abb. 4.60 sind für $K^S = 5$ $\dot{\hat{q}}$ und $\dot{\hat{q}}$, die lineare bzw. quadratische Änderung des Verschiebungsvektors dargestellt. Sämtliche Ergebnisse

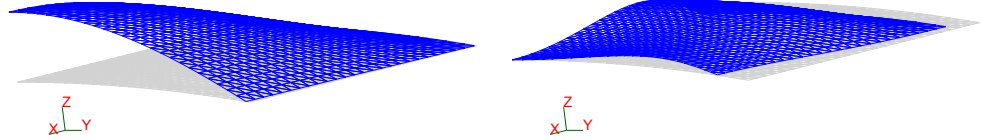


Abbildung 4.60: $\hat{\mathbf{q}}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}$, $K^S = 5$, Modell M1, **RB P1**

der Nachbeulanalysen für $K^S = 1 - 30$ für **RB P1** und **RB P2** sind in Anhang D.3 zu finden.

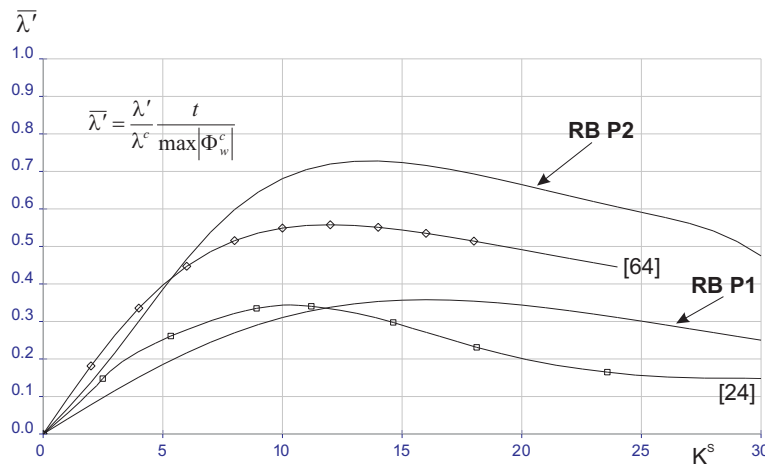
Für alle untersuchten Schalensegmente mit **RB P1** und **RB P2** gilt $\dot{\lambda} \neq 0$. Damit handelt es sich in allen Fällen um **asymmetrische Verzweigungen**. Bei geringen Segmentkrümmungen ist die Asymmetrie der Verzweigung nur schwach ausgeprägt. Hier deutet sich der Übergang von der asymmetrischen zur stabil symmetrischen Verzweigung der ebenen Platte an. Qualitativ stimmen sowohl $\hat{\mathbf{q}}$ als auch $\dot{\hat{\mathbf{q}}}$ für alle untersuchten Segmente überein.

Weiterhin gilt für alle Segmente $C \approx 0$, was auf die Verwendung von $\hat{\mathbf{q}}^p$ als spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{q}}$ zurückzuführen ist. Damit kann $\dot{\lambda}$ vereinfacht nach Gl. (3.94) berechnet werden.

Probleme traten bei der Berechnung von $\dot{\lambda}$ bei Segmenten mit $K^S \geq 16$ auf. In diesen Fällen konnte kein zuverlässiger Wert für $\dot{\lambda}$ ermittelt werden. Die Ursache hierfür lag in der Ungenauigkeit der numerischen Differentiation zur Bildung der 2. Ableitungen der tangentiellen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , wo eine starke Sensitivität gegenüber dem Differentiationsparameter $ilon$ zu beobachten war. Für die Fälle $K^S \geq 16$ beschränkte sich die Nachbeulanalyse deshalb auf die Bestimmung von $\dot{\lambda}$.

In Abb. 4.61 sind die Ergebnisse für $\dot{\lambda}$ für die beiden untersuchten Randbedingungen im Vergleich zu Referenzlösungen aus [24] und [64] dargestellt. Folgende Sachverhalte sind zu beachten bzw. werden aus Abb. 4.61 deutlich:

1. Auffallend ist der Einfluß der Randbedingung **RB P2**, die sich in höheren $\dot{\lambda}$ - Werten niederschlägt. Daraus ergeben sich steilere Abfälle der sekundären Pfade im Anfangsnachbeulbereich, woraus eine erhöhte Imperfektionssensitivität resultiert.
2. Bei den Referenzlösungen in Abb. 4.61 handelt es sich um ebenfalls numerische Lösungen aus [24] an einem mit **RB P1** vergleichbarem



Modell und um analytische Lösungen aus [64] für $K \leq 24$. Die Lösung nach [64] geht von einwelligen, hier zutreffenden Beulansätzen im Nachbeulbereich aus.

3. Um einen Vergleich zwischen den Lösungen zu ermöglichen, ist eine Skalierung von λ vorzunehmen, da λ von der gewählten Normierung für Φ^c abhängt. Dies geschieht hier, wie auch in [24], durch den Bezug von λ auf Φ_w^c .
4. Während die Unterschiede zwischen den numerischen Lösungen noch moderat ausfallen, können die Ergebnisse aus [64] nicht nachvollzogen werden. Als Ursache der gravierenden Unterschiede sind, wie schon bei den linearen Stabilitätsuntersuchungen, die unterschiedlichen Modelle bzgl. des Vorbeul- und Nachbeulverhaltens (reiner Membranvorbeulzustand und klassische Beulrandbedingungen in [64]) zu vermuten. Speziell das Nachbeulverhalten wird dabei offensichtlich besonders stark von Abweichungen in den Randbedingungen beeinflusst.

4.5.9 Sekundäre Pfade

Anhand der berechneten Nachbeulgrößen $\hat{\lambda}$, \hat{q} , $\hat{\lambda}'$ und \hat{q}' lassen sich sekundäre Gleichgewichtspfade konstruieren. Für $K^S = 5$ stellt Abb. 4.62 den linear bzw. quadratisch approximierten sekundären Pfad in der $w - \lambda$ - Ebene dar. Deutlich zu erkennen ist die **asymmetrische Verzweigung**. Der approximierte sekundäre Pfad besitzt einen kritischen Punkt. Dabei handelt sich um einen **Durchschlagspunkt** mit einem **Lastminimum**.

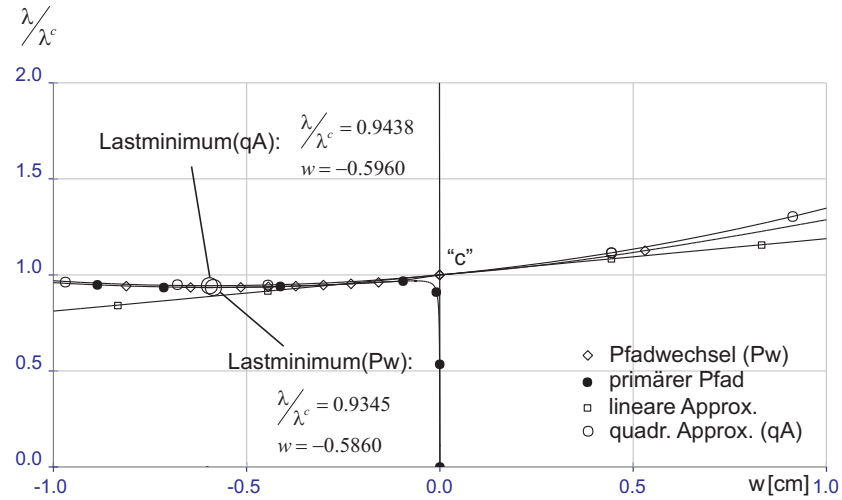


Abbildung 4.62: Sekundärer Pfad, $K^S = 5$, **RB P1**, w in Segmentmitte

Alternativ dazu wurde der Pfadwechselalgorithmus `path-switch.s` aus Abschn. 3.9.2 verwendet, um in λ^c einen Wechsel vom primären auf den sekundären Pfad vorzunehmen. Hierbei ist zu beachten, dass der Pfadwechsel von einem konstruierten Gleichgewichtspunkt aus erfolgt, der im Strukturverhalten des numerischen Modells nicht existiert. Für den Prädiktorschritt wird der in „c“ vorhandene Verformungszustand durch den Singulärvektor Φ^c gestört. Die anschließende Korrekteriteration erfolgt dann auf, für das FE - Modell existierende, benachbarte Gleichgewichtspfade.

Die Pfadwechselprozedur kann zum einen, wie in Abb. 4.62 zu sehen ist, auf den schon bekannten primären Pfad führen. In Abb. 4.63 ist dies noch einmal deutlicher dargestellt. Zum anderen kann der Sprung auf einen Gleichgewichtspfad erfolgen, der zu einem geometrisch imperfekten FE - Modell gehört. Auf welchen Pfad der Wechsel erfolgt, hängt von der Richtung des Prädiktorschrittes ab (Variable `direction` in `path-switch.s`).

Nach dem Pfadwechsel, der hier nach nur wenigen Versuchen erfolgreich war, wurde der jeweilige Gleichgewichtspfad durch ein Bogenlängenverfahren, basierend auf der Routine `critical-point.s` aus Anhang C, weiterverfolgt.

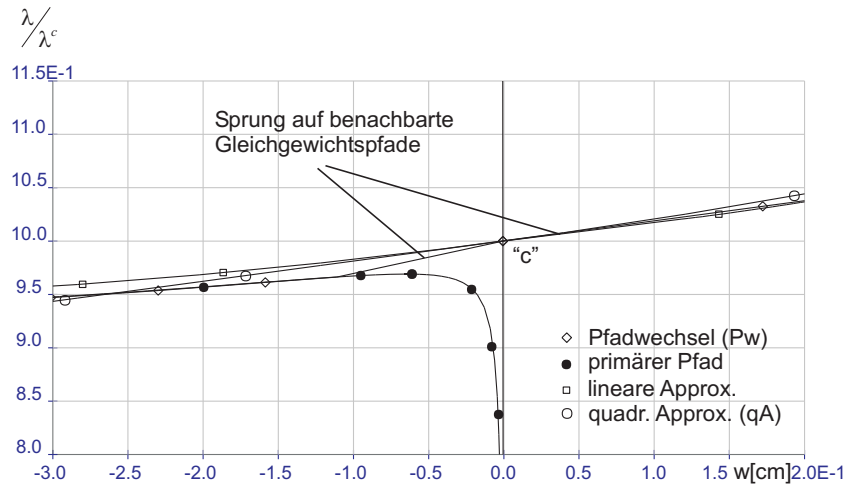


Abbildung 4.63: Sekundärer Pfad - Detail, $K^S = 5$, **RB P1**

Abgesehen von kleinen Rechenungenauigkeiten sind der primäre und der durch einen Pfadwechsel in Richtung $-w$ verfolgte Pfad nahezu identisch. Ebenso wie bei der quadratischen Approximation des sekundären Pfades tritt ein Lastminimum mit ähnlichen Last- und Verformungsgrößen auf.

Für $K^S = 10$ zeigt Abb. 4.64 den konstruierten sekundären Pfad, den primären und die durch Pfadwechsel ermittelten Pfadabschnitte anhand der Durchbiegung in Segmentmitte, in Abb. 4.65 für die Stauchung u des Schalensegmentes am Lastrand. Die Pfadverläufe bestätigen die vorangegangenen

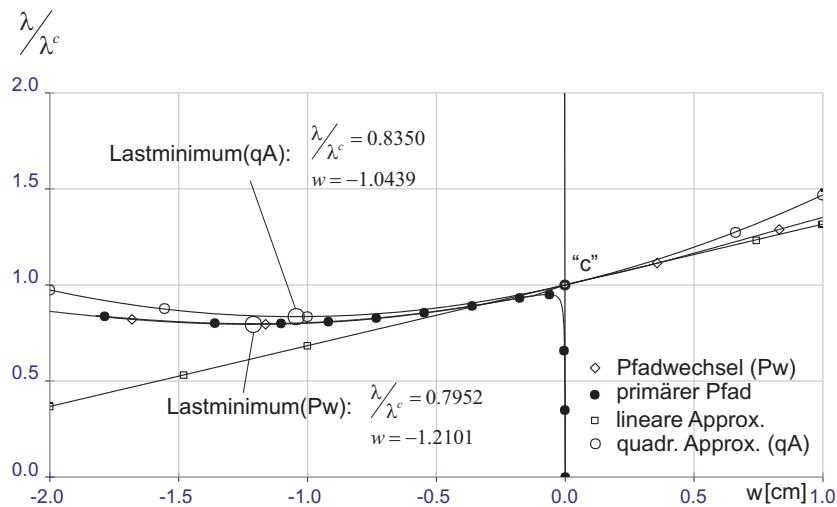


Abbildung 4.64: Sekundärer Pfad, $K^S = 10$, **RB P1**, w in Segmentmitte

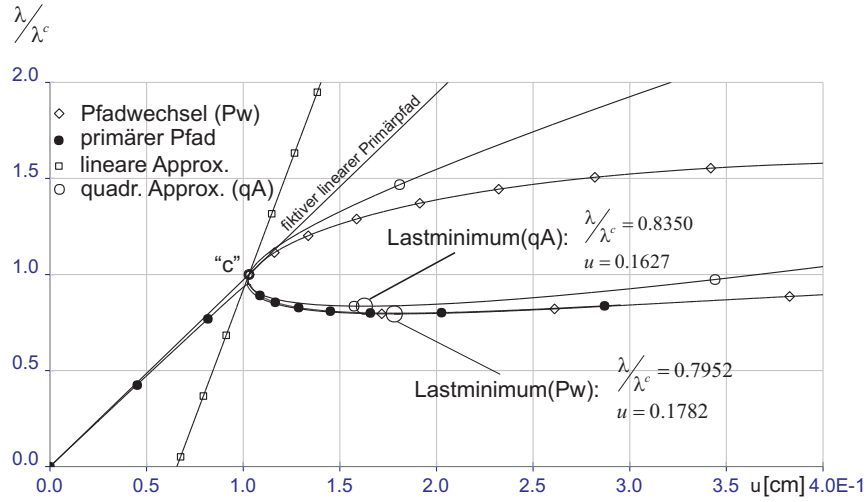


Abbildung 4.65: Sekundärer Pfad, $K^S = 10$, **RB P1**, Randverschiebung u

Überlegungen für $K^S = 5$.

Außerdem wird deutlich, dass der quadratisch approximierte sekundäre Pfad die obere Schranke für die anderen Gleichgewichtspfade darstellt. Wie schon bei $K^S = 5$ liegt auch hier das approximierte Lastminimum oberhalb des Minimums des primären Pfades. Damit weist der primäre Pfad dieselben Eigenschaften wie Pfade von Strukturen auf, die mit kleinen Imperfektionen in Form von Φ^c behaftet sind (siehe Abschn. 4.5.10). Auch diese verlaufen unterhalb des sekundären Pfades und nähern sich bei kleiner werdender Imperfektionsamplitude dem sekundären Pfad an.

In Anhang D.3 sind alle berechneten Nachbeulminima und die dazugehörigen Durchbiegungen in Segmentmitte aufgeführt. Dabei ergibt sich das konstruierte, auf λ^c bezogene Nachbeulminimum aus:

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda^{NB}}{\lambda^c} = -\frac{\dot{\lambda}^2}{2\lambda^c \dot{\lambda}}.$$

Für die zugehörige Durchbiegungsamplitude in Segmentmitte gilt aufgrund der vorgenommenen Normierung, siehe Abschn. 4.5.8, und $w^c \approx 0$:

$$w^{NB} = -\dot{\lambda}/\dot{\lambda}.$$

Die Approximation des Nachbeulminimums war nur für $1 \leq K^S \leq 15$ möglich, siehe Abschn. 4.5.8. Neben den approximateden Nachbeulminima enthält Tab. D.21 die Nachbeulminima, die sich infolge eines Pfadwechsels mit anschließender Pfadverfolgung ergaben.

Es wird deutlich, dass bei stärker gekrümmten Segmenten das Lastminimum bei größeren Verformungen und kleineren λ/λ^c - Verhältnissen realisiert wird. Der zunehmende Abstand zum kritischen Punkt „c“ verschlechtert die Pfadapproximation, was bei der Bewertung des konstruierten Nachbeulminimums zu berücksichtigen ist. Insgesamt ist jedoch auch bei größeren Krümmungen noch eine relativ gute Übereinstimmung zwischen der Näherungslösung und dem Minimum des Primärpfades festzustellen. In allen Fällen lieferte die Approximation etwas höhere Werte für das Lastminimum als der Pfadwechsel. Die Ergebnisse aus dem Pfadwechsel liegen somit auf der sicheren Seite. Dies wird durch Vergleichslösungen aus [24] bestätigt.

Die Verformungen entlang des sekundären Pfades stellen sich einwellig in Längs- und Umfangsrichtung dar. Die Approximation des Verformungszustandes erfolgte, beispielsweise für $K^S = 5$, durch die Überlagerung der Anteile \dot{q} und \ddot{q} nach Abb. 4.60.

In den Fällen $K^S = 1$ und $K^S = 30$ konnten die Nachbeulminima nicht durch einen Pfadwechsel ermittelt werden, wofür unterschiedliche Gründe vorliegen. Bei $K^S = 1$ befindet sich das Nachbeulminimum zu dicht bei λ^c , so dass der Prädiktorschritt sofort auf den wieder ansteigenden Pfadabschnitt nach dem Nachbeulminimum führte. Das Nachbeulminimum wurde deshalb hier alternativ anhand des numerisch ermittelten Primärpfades ermittelt. Bei $K^S = 30$ wird das Nachbeulminimum erst bei sehr großen Verformungen realisiert. Dies führte zu numerischer Instabilität während der Pfadverfolgung, so dass für diesen Fall keine Lösung existiert.

4.5.10 Imperfektionsanalysen - RB P1

Eine große praktische Bedeutung besitzt die Frage nach der Imperfektionsanfälligkeit einer Struktur. Im vorliegenden Fall wurden Imperfektionseinflüsse schon in Zusammenhang mit Modellimperfektionen diskutiert. Die Auswirkungen zusätzlicher Imperfektionen auf das Tragverhalten sollen im Folgenden anhand der Segmente mit den Randbedingungen **RB P1** und **RB F2** dargestellt werden.

Die zu diesem Thema durchgeführten Analysen erfolgten anhand von Pfadverfolgungsalgorithmen und, wenn möglich, mit den Beziehungen der Koiter-schen Imperfektionssensitivität aus Abschn. 3.10.

Im Fall der Schalensegmente mit **RB P1** ergab die Nachbeulanalyse, dass es sich bei den (theoretischen) kritischen Punkten um asymmetrische Verzweigungen handelt. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass die Segmente sehr empfindlich auf ausgewählte Imperfektionen reagieren, das heißt dass schon kleine geometrische Imperfektionen zu erheblichen Tragfähigkeitseinbußen gegenüber λ^c führen können.

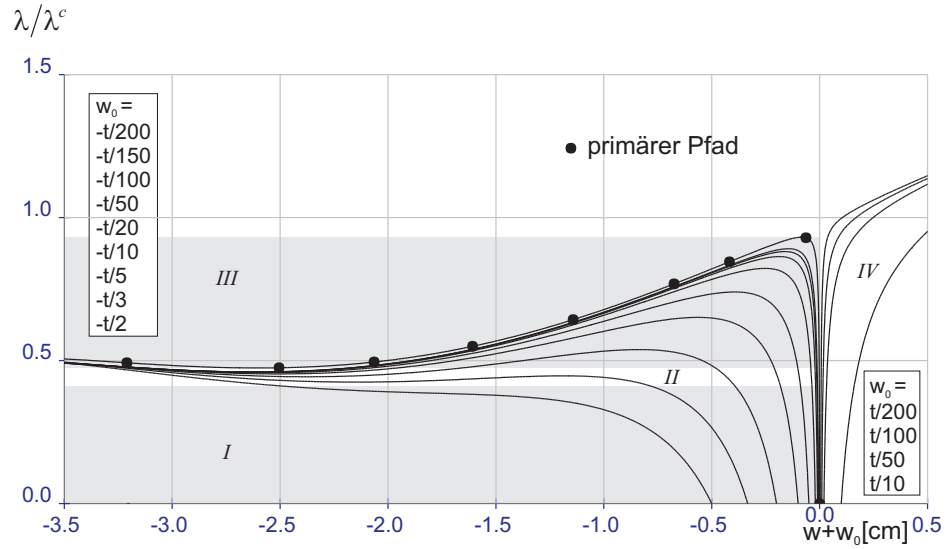


Abbildung 4.66: Imperfekte Pfade: $K^S = 20$, **RB P1**, Durchbiegung in Segmentmitte

Aus analytischen Untersuchungen in [64] ist bekannt, dass Schalensegmente mit **RB P1** gegenüber Imperfektionsformen, die affin zur einwelligen Beulform Φ^c sind, die größte Sensitivität aufweisen. Aus dem Verlauf des sekundären Pfades läßt sich sofort auf die „gefährlichste“ Richtung für die Imperfektion schließen. Es sind dies Imperfektionen mit der Imperfektionsamplitude $-w_0$, die eine Verminderung der ursprünglichen Krümmung des Segmentes zur Folge haben und damit die Schalentragswirkung verringern.

In Abb. 4.66 sind für $K^S = 20$ einige, durch Pfadverfolgung ermittelte Gleichgewichtspfade bei verschiedenen Imperfektionsamplituden w_0 dargestellt. Die imperfekten FE - Modelle wurden, wie üblich, dadurch erzeugt, dass Φ^c skaliert und auf die perfekte Geometrie aufgebracht wurde. Daraus resultiert dann in Schalensegmentmitte die Abweichung w_0 . Auf eine Anpassung der Randbedingungen an die veränderte Geometrie wurde verzichtet, wodurch der Imperfektionseinfluß etwas verstärkt wird.

In Abb. 4.66 sind folgende 4 Kategorien zu erkennen, in die die Last - Verformungspfade in Abhängigkeit von der Imperfektionsrichtung und -amplitude fallen:

- I* Die begleitende Stabilitätsuntersuchung liefert keinen kritischen Stabilitätspunkt, für den gesamten Pfad gilt $\omega_1 > 0$. Bei rein elastischem Verhalten würde keine Belastungsgrenze existieren.

- II* Die Pfade weisen zwei kritische Punkte auf, die durch den zweimaligen Nulldurchgang von ω_1 gekennzeichnet sind. Nachbeuluntersuchungen bestätigen, dass es sich dabei um Durchschlagspunkte mit einem lokalen Lastmaximum bzw. -minimum handelt. Beide Durchschlagspunkte weisen kaum Unterschiede in der Lasthöhe auf. Sie liegen jedoch unterhalb des Lastminimums des primären bzw. sekundären Pfades. Die imperfekte Struktur ist stabilitätsgefährdet.
- III* Auch hier sind Stabilitätsprobleme wie bei *II* zu verzeichnen. Im Unterschied zu *II* liegen die Lastmaxima jedoch über dem Lastminimum des Primärpfades.
- IV* Die Pfade weisen keine kritischen Punkte auf ($\omega_1 > 0$). Damit könnte theoretisch die Belastung über den Verzweigungspunkt hinaus gesteigert werden, praktisch handelt es sich, wie bei *I*, um ein Spannungsproblem.

Alle Pfade in den Bereichen I - III verlaufen unterhalb des zugehörigen primären Pfades und evtl. Lastmaxima bzw. -minima liegen unterhalb der entsprechenden Größen des primären Pfades. Außerdem verlaufen alle Pfade auch unterhalb des sekundären Pfades und evtl. auftretende Lastminima liegen immer unter dem Nachbeulminimum. Eine Gleichgewichtsverzweigung aus einem imperfekten Pfad trat nicht auf. Die Strukturverformungen entlang der imperfekten Pfade sind einwellig in Längs- und Umfangsrichtung und entsprechen damit im Wesentlichen Φ^c .

Aus praktischer Sicht interessiert besonders die spezielle Imperfektionsamplitude $-w_0^*$, die gerade noch zu einem Stabilitätsproblem führt und die Grenze zwischen den Bereichen I und II, zwischen Spannungs- und Stabilitätsproblem, markiert. Beim vorliegenden Beispiel liegt $-w_0^*$ bei einer relativ großen Imperfektionsamplitude zwischen $-t/3$ und $-t/2$. Der Abfall der elastischen Beullast gegenüber der Verzweigungslast beträgt dabei $\approx 45\%$.

Imperfektionsanalysen anhand von Pfadverfolgungsalgorithmen sind sehr rechenzeitintensiv. Alternativ können Näherungsverfahren nach Abschn. 3.10 verwendet werden, die auf den Ergebnissen der Nachbeulanalyse aufbauen. So lassen sich unkompliziert für ein vorgegebenes w_0 die imperfekten Gleichgewichtspfade approximieren. Die elastischen Beullasten berechnen sich aus Gl. 3.129. In Abb. 4.67 ist dieses Vorgehen für $w_0 = -t/50$ dargestellt. Dabei sind nur die Segmente berücksichtigt, deren imperfekte Pfade bei w_0 noch ein Lastmaximum aufweisen und für die $\hat{\lambda}$ vorliegt.

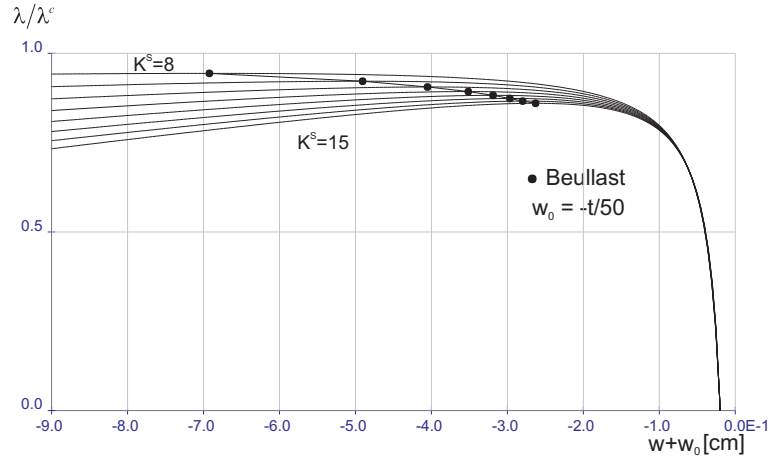


Abbildung 4.67: Imperfekte Pfade, Approximation, **RB P1**, Modell M1, Durchbiegung in Segmentmitte

Die Abschätzungen sind durchaus brauchbar, die Abweichungen zu den genaueren Beullasten aus der Pfadverfolgung betragen max. 10%. Bei größerem w_0 werden die Approximationen selbstverständlich immer ungenauer, da die Ergebnisse der Nachbeulanalyse nur für die Umgebung des Verzweigungspunktes gültig sind. Von praktischem Interesse sind in der Regel jedoch nur kleine Imperfektionsamplituden, so dass hier eine wichtige Anwendung für die Ergebnisse der Nachbeulanalyse vorliegt.

4.5.11 Imperfektionsanalysen - **RB F2**

Für die Teilschalenfelder mit **RB F2** ist im Gegensatz zu den Segmenten mit **RB P1** nicht sofort offensichtlich, für welche Imperfektionsform die Struktur die größte Sensitivität aufweist. Deshalb wurden geometrische Imperfektionen in Form von Φ_{nl}^c , der Beulform aus der nichtlinearen Stabilitätsanalyse, und Φ^c , Φ_2 und Φ_3 aus der linearen Stabilitätsanalyse berücksichtigt. Letztere stellen dabei lediglich spezielle geometrische Imperfektionsformen, ohne den stabilitätstheoretischen Hintergrund wie Φ_{nl}^c , dar.

Die Gleichgewichtspfade für die imperfekten Teilschalenfelder ließen sich nur unter Anwendung von Pfadverfolgungsalgorithmen ermitteln. Eine Pfadapproximation war hier nicht möglich, da keine Nachbeulparameter vorlagen. Begleitend zur Pfadverfolgung wurde wieder die Entwicklung des kleinsten Standardeigenwertes ω_1 beobachtet. Aufgrund der zum Teil unsymmetrischen Beulverformungen erfolgten die Berechnungen mit dem FE - Modell M 2. Die Untersuchungen beschränkten sich auf die Teilschalenfelder $K^S = 20$ und $K^S = 10$. Die Teilschalenfelder $K^S = 20$ und $K^S = 10$ stehen dabei

exemplarisch für Teilschalenfelder, für die $\Phi^c \approx \Phi_{nl}^c$ bzw. $\Phi^c \neq \Phi_{nl}^c$ gilt.

Imperfekte Teilschalenfelder $K^S = 20$

In Abb. 4.68 und Abb. 4.69 sind noch einmal die Beulformen aus der linearen bzw. nichtlinearen Stabilitätsanalyse dargestellt. Die Imperfektionsformen waren affin zu diesen Beulformen, wobei verschiedene Imperfektionsamplituden verwendet wurden. Die Imperfektionsform wurde so skaliert, dass die größte bzw. kleinste Abweichung zur perfekten Geometrie ($= w_0$) an der Stelle lag, für die die jeweilige Beulform den größten Absolutwert der Durchbiegung besaß. In Abhängigkeit von der betrachteten Imperfektionsform sind dies unterschiedliche Orte auf der Längsachse. Die zugehörigen globalen Durchbiegungs - Freiheitsgrade waren bei der Imperfektion affin:

- Φ^c - DOF 6193 bei $\approx 1/6$ der Segmentlänge a ,
- Φ_2 - DOF 1917 bei $\approx 1/5$ a ,
- Φ_3 - DOF 5163 bei $\approx 1/3$ a ,
- Φ_{nl}^c - DOF 3996 bei $1/2$ a .

Abb. 4.72 - 4.77 zeigen Projektionen der Gleichgewichtspfade für die imperfekten Teilschalenfelder, die Imperfektionsformen aufwiesen, die affin zu den Beulformen aus der linearen Stabilitätsanalyse waren.

Neben den Pfaden in der jeweiligen λ - „maßgebender DOF“ - Ebene (siehe oben) werden die Gleichgewichtspfade in der λ - DOF 3996 - Ebene abgebildet. Dabei ist DOF 3996 der Freiheitsgrad, der zur Durchbiegung in Segmentmitte gehört. Auf die Darstellung des Pfadverlaufes anhand weiterer Freiheitsgrade wurde hier verzichtet. Dafür ist innerhalb der numerischen Rechnung der vollständige Verformungsvektor für jeden berechneten Schritt abzuspeichern.

Aus der Vorgabe von w_0 resultiert für DOF 3996 im Fall der Imperfektionsform Φ^c die Imperfektionsamplitude \bar{w}_0 , siehe Abb. 4.75. Bei den in Längsrichtung asymmetrischen Imperfektionsformen Φ_2 und Φ_3 beträgt $\bar{w}_0 \approx 0$.

Die Pfade für die imperfekten Strukturen verlaufen, unabhängig von der aktuellen Imperfektionsform und -amplitude, in der Regel ansteigend bis zu einem Maximum. Der anschließende Abfall der Pfade ist zum Teil mit einer Umkehr der Verformungsrichtung am maßgeblichen Freiheitsgrad verbunden. Die Pfadverläufe ähneln den Primärpfaden nach Abb. 4.52. Nach Überschreiten der Maxima wurde die Pfadverfolgung willkürlich abgebrochen.

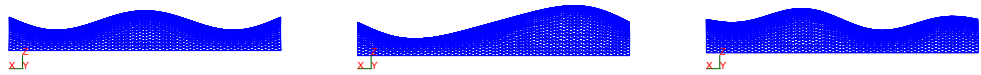


Abbildung 4.68: Φ^c, Φ_2, Φ_3 (von links), Längsansicht, $K^S = 20$

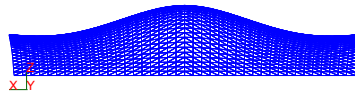


Abbildung 4.69: Φ_{nl}^c , Längsansicht, $K^S = 20$



Abbildung 4.70: Φ^c, Φ_2, Φ_3 (von links), Längsansicht, $K^S = 10$

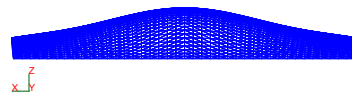


Abbildung 4.71: Φ_{nl}^c , Längsansicht, $K^S = 10$

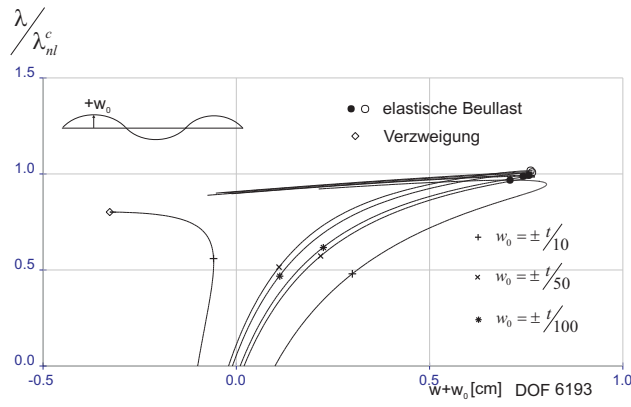


Abbildung 4.72: $K^S = 20$, Imperfektion: Φ^c , w: DOF 6193

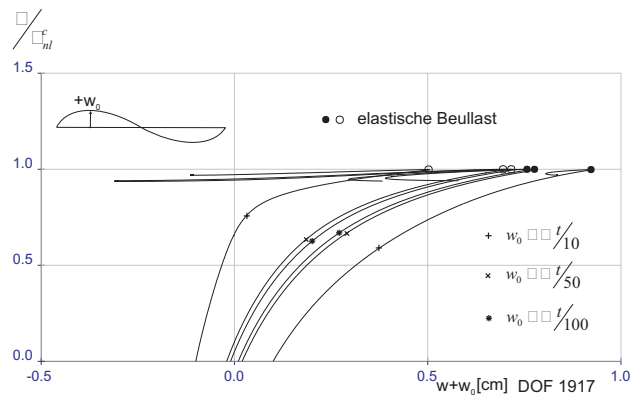


Abbildung 4.73: $K^S = 20$, Imperfektion: Φ_2 , w: DOF 1917

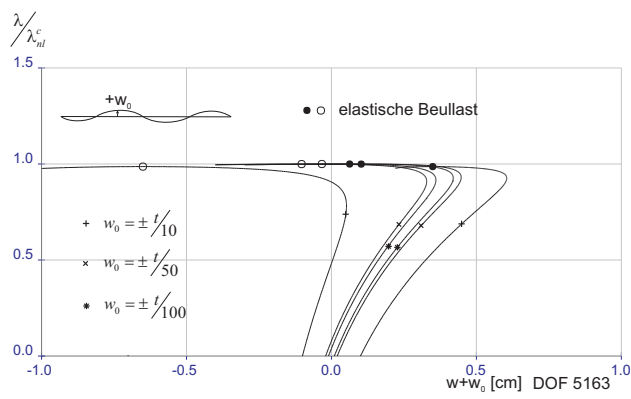


Abbildung 4.74: $K^S = 20$, Imperfektion: Φ_3 , w: DOF 5163

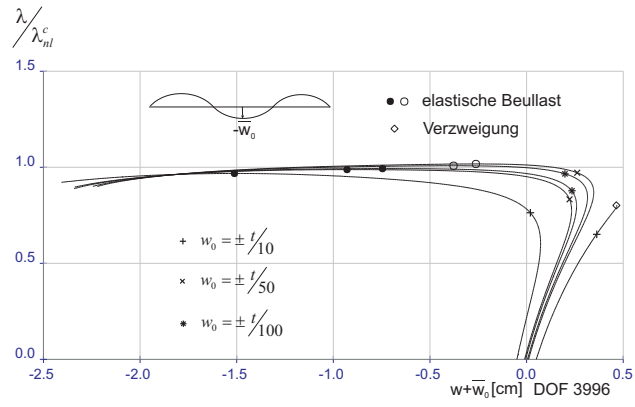


Abbildung 4.75: $K^S = 20$, Imperfektion: Φ^c , w: DOF 3996

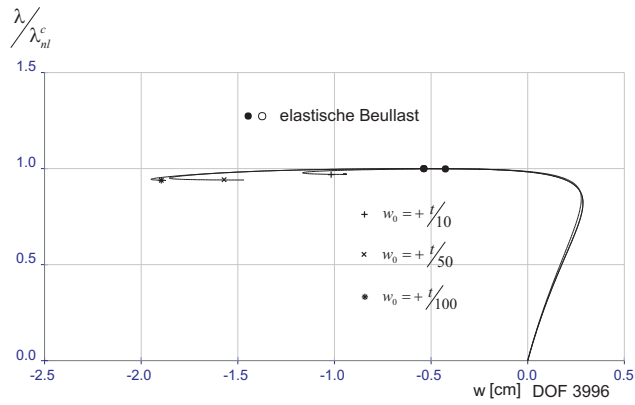


Abbildung 4.76: $K^S = 20$, Imperfektion: Φ_2 , w: DOF 3996

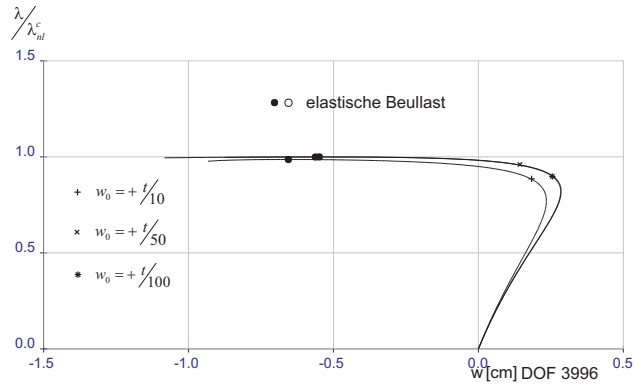


Abbildung 4.77: $K^S = 20$, Imperfektion: Φ_3 , w: DOF 3996

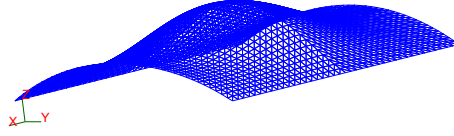


Abbildung 4.78: Φ_{imp}^c , Imperfektion: Φ_2 , $w_0 = t/50$

Bei den Lastmaxima handelt es sich um kritische Stabilitätspunkte, da ein Nulldurchgang nach $\omega_1 < 0$ existiert. Eine Stabilitätsanalyse im kritischen Punkt, z.B. bei der Imperfektion affin Φ_2 mit $w_0 = t/50$ und dem Singulärvektor im kritischen Punkt Φ_{imp}^c nach Abb. 4.78, ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda_{imp}^c &= 751.92 \\ \mathbf{F}^T \Phi_{imp}^c &= -0.3413 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Durchschlagspunkt} \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} = 0 \\ A &= 0.05685 \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} = \alpha^2 \frac{A}{\mathbf{F}^T \Phi_{imp}^c} = -\alpha^2 0.1666 < 0. \end{aligned}$$

Damit wird bestätigt, was auch schon aus dem Pfadverlauf sichtbar wird, dass es sich bei dem kritischen Punkt um einen **Durchschlagspunkt** mit einem **Lastmaximum** handelt. Diese Aussage gilt - mit einer Ausnahme - auch für die anderen Pfade.

Im Fall der Imperfektionsform Φ^c mit $w_0 = -t/10$ konnte der Pfad nur bis zur Lasthöhe $\lambda = 602.79 \approx 0.80\lambda_{nl}^c$ verfolgt werden. Für nachfolgende Prädiktorschritte führte die Korrekteriteration innerhalb des Bogenlängenverfahrens auf keine weitere Gleichgewichtslösung. Der Verlauf von ω_1 zeigt einen kritischen Punkt für dieses Lastniveau an. Der Singulärvektor im kritischen Punkt stellte sich entsprechend Abb. 4.79 zweiwellig in Längsrichtung dar. Eine Stabilitätsanalyse im kritischen Punkt ergibt hier:

$$\begin{aligned} \lambda_{imp}^c &= 602.79 \\ \mathbf{F}^T \Phi_{nl}^c &= -2.6088e - 7 \quad \rightarrow \quad \text{Verzweigungspunkt} \\ A &= 2.03296e - 6 \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \text{symmetrisch} \\ B &= -0.53275 \quad D = 0.36935 \quad E = -1.47920 \\ \rightarrow \quad \dot{\lambda} &= -\alpha^2 \frac{D + 3E}{3B} = -\alpha^2 2.545 < 0. \end{aligned}$$

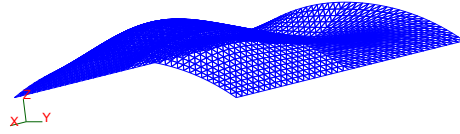


Abbildung 4.79: Φ_{imp}^c , Imperfektion: Φ^c , $w_0 = -t/10$

Hier handelt es sich demnach um eine **instabil symmetrische Verzweigung**. Eine weitere Laststeigerung wäre damit nicht möglich. Zur Überprüfung dieses Ergebnisses wurde im kritischen Punkt ein Pfadwechsel, initiiert mit Φ_{imp}^c , vorgenommen. Der Pfadwechsel mit anschließender Pfadverfolgung führte tatsächlich auf die abfallenden Äste eines zusätzlichen Pfades durch den Verzweigungspunkt ($\omega_1 < 0$).

Für die Imperfektion affin zu Φ_{nl}^c zeigt Abb. 4.80 die ermittelten Gleichgewichtspfade anhand der Durchbiegung in Segmentmitte. Die Pfade weisen ebenfalls kritische Punkte auf, die als **Durchschlagspunkte** mit **Lastmaxima** identifiziert werden.

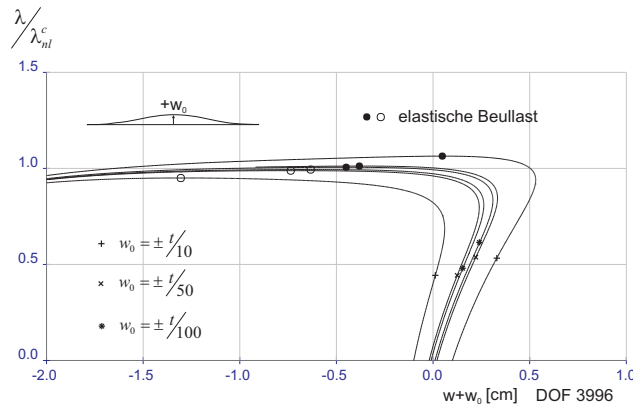


Abbildung 4.80: $K^S = 20$, Imperfektion: Φ_{nl}^c , w : DOF 3996

In Abb. 4.80 sind „günstige“ und „ungünstige“, das heißt beullasterhöhende bzw. -vermindernde Imperfektionsrichtungen deutlich zu erkennen. Bei $+w_0$ liegen die Durchschlagspunkte (•) oberhalb, bei $-w_0$ (o) unterhalb λ_{nl}^c . Dies läßt sich dadurch erklären, dass infolge $+w_0$ eine zusätzliche, die Schalentragswirkung verstärkende Krümmung des Segmentes in Längs- und Umfangsrichtung aufgebaut wird.

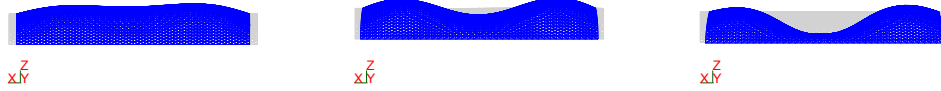


Abbildung 4.81: Verformte Struktur für die Laststufen $\lambda/\lambda_{nl}^c = 0.8, 0.99, 0.95$ (von links), Längsansicht, Imperfektion: Φ_2 , $w_0 = t/50$

Dieser steifigkeitserhöhende Effekt stellt sich ebenfalls, wenn auch nicht so stark ausgeprägt, bei der Imperfektionsform Φ^c ein. In diesem Fall führt die Richtung $-w_0$ ($= -\Phi^c$) zu den höheren Beullasten (Ausnahme: $w_0 = -t/10$). Offensichtlich besitzt die Beulhalbwelle in der Mitte den entscheidenden, das Tragverhalten dominierenden Einfluß. „Günstig“, also steifigkeitserhöhend wirkt es sich aus, wenn die beiden außenliegenden Beulhalbwellen nach innen ($-w_0$), die Beulhalbwelle in der Mitte nach außen gerichtet sind ($+\bar{w}_0$).

Die Imperfektionsformen Φ_2 und Φ_3 führen nur zu geringfügigen Steifigkeitsveränderungen. Die elastischen Beullasten liegen insgesamt etwas unterhalb λ_{nl}^c . Die Richtung der Imperfektion hat in diesen Fällen aufgrund der in Längsrichtung asymmetrischen Beulformen keine Bedeutung.

Abb. 4.81 zeigt für die Imperfektionsform Φ_2 Verformungszustände für drei verschiedene Laststufen, bei $\lambda/\lambda_{nl}^c = 0.8, 0.99$ vor und $\lambda/\lambda_{nl}^c = 0.95$ nach dem Überschreiten des Lastmaximums. Die Verformungsbilder (im Fall $\lambda/\lambda_{nl}^c = 0.8$ 2-fach überhöht dargestellt) lassen nur geringfügige Abweichungen von der symmetrischen Beulverformung der perfekten Struktur erkennen. Deutlich ist dagegen der Einfluß von Φ_{nl}^c bei Annäherung an λ_{nl}^c zu sehen, wodurch ein Umschlag der Verformungsrichtung in Segmentmitte ausgelöst wird.

Imperfekte Teilschalenfelder $K^S = 10$

Für $K^S = 10$ wurden die „linearen“ Beulformen nach Abb. 4.70 und die „nichtlineare“ Beulform nach Abb. 4.71 ermittelt. Im Gegensatz zu $K^S = 20$ sind in diesem Fall $\Phi^c \neq \Phi_{nl}^c$ und $\Phi_{nl}^c \approx \Phi_3$. Für die Imperfektionsanalysen wurden geometrische Imperfektionen in der Form Φ^c und Φ_{nl}^c ausgewählt.

Zu w_0 gehören hier folgende Durchbiegungs - Freiheitsgrade:

- Φ^c - DOF 2197 bei $\approx 1/4$ der Segmentlänge a ,
- Φ_{nl}^c - DOF 3996 bei $1/2 a$.

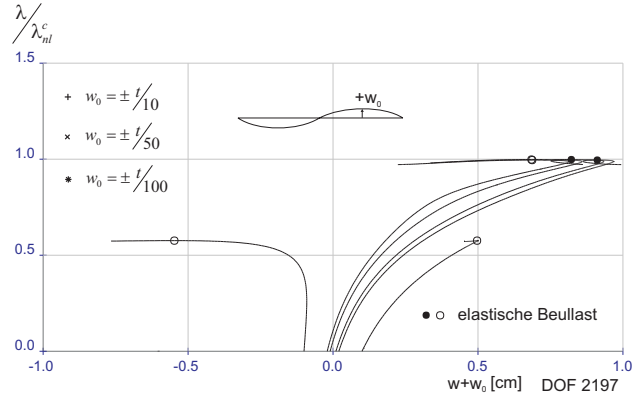


Abbildung 4.82: $K^S = 10$, Imperfektion: Φ^c , w: DOF 2197

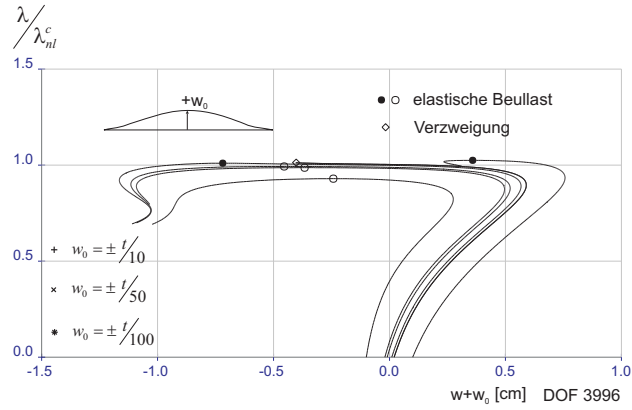


Abbildung 4.83: $K^S = 10$, Imperfektion: Φ_{nl}^c , w: DOF 3996

Abb. 4.82 zeigt die ermittelten Pfade für die Imperfektionsform Φ^c bei verschiedenen Imperfektionsamplituden w_0 . In allen Fällen weisen die Pfade **Durchschlagspunkte** mit **Lastmaxima** auf.

Die erreichten Lasthöhen stimmen aufgrund der in Längsrichtung asymmetrischen Imperfektionsform bei wechselndem Vorzeichen und gleichem w_0 überein. Bei kleinen Imperfektionsamplituden ist, wie schon bei $K^S = 20$, nur ein sehr geringer Tragfähigkeitsverlust gegenüber λ_{nl}^c zu verzeichnen.

Dagegen ist für $w_0 = \pm t/10$ mit $\lambda/\lambda_{nl}^c = 0.576$ ein erheblicher Abfall bei den erreichten Lastmaxima festzustellen. Die starke Imperfektion beeinflusst das Strukturverhalten offenbar sehr ungünstig. Nicht die Imperfektionsform Φ^c an sich, sondern erst bestimmte Imperfektionsamplituden führen zu einer entscheidenden Schwächung der Struktur.

In Abb. 4.83 sind die Pfadverläufe für die Imperfektionsform Φ_{nl}^c dargestellt.

Deutlich ist hier, wie bei $K^S = 20$, wieder die Abhängigkeit von der Imperfektionsrichtung zu sehen. Ungünstig sind wiederum Imperfektionen, die entgegen der ursprünglichen Segmentkrümmung gerichtet sind. Die Abweichungen der maximalen Lasthöhen gegenüber λ_{nl}^c sind gering. Bei der Amplitude $w_0 = -t/10$ beträgt der Tragfähigkeitsverlust weniger als 10%.

Die Imperfektionsanalysen zu den Teilschalenfeldern mit **RB F2** lassen folgende Schlüsse zu:

1. Die imperfekten Strukturen sind, wie auch die perfekte Struktur, stabilitätsgefährdet. Ihr Tragvermögen wird durch das Erreichen eines kritischen Stabilitätszustandes begrenzt. Der kritische Punkt ist dabei in der Regel ein **Durchschlagspunkt** mit einem **Lastmaximum**.
2. Sofern es sich um kleine Imperfektionsamplituden w_0 handelt, existieren nur geringe Unterschiede zwischen dem Lastmaximum und der elastischen Beullast der perfekten Struktur.
3. Es ist zu unterscheiden zwischen in Längsrichtung asymmetrischen und symmetrischen Imperfektionsformen. Während im ersten Fall die Richtung der Imperfektionsform keine Rolle spielt, existieren bei symmetrischen Imperfektionsformen günstige und ungünstige, das heißt tragfähigkeitserhöhende bzw. -vermindernde Imperfektionsrichtungen. Die Ursache dafür liegt nicht wie bei **RB P1** in der Charakteristik des Stabilitätsproblems, sondern allein in der Schalentragwirkung.
4. Schon die perfekte Struktur weist ein Durchschlagsproblem auf. Dieses Stabilitätstragverhalten mit Membran- und Biegeverformungen dominiert in hohem Maße das Verhalten der imperfekten Strukturen, so dass die Imperfektionen in der Regel nur zu einer geringfügigen Modifizierung, nicht aber zu einer grundsätzlichen Änderung des Stabilitätsverhaltens führen.
5. Stabilitätsgefährdete Strukturen, die wie die Teilschalenfelder mit **RB F2** eine nichtlineare Stabilitätsanalyse zur Ermittlung des niedrigsten kritischen Punktes der perfekten Struktur erfordern, besitzen gegenüber Imperfektionen, die affin bzw. ähnlich zu Φ_{nl}^c sind, im Allgemeinen die größte Sensitivität. Die ausschließliche Analyse von Imperfektionsformen entsprechend der Beulformen aus linearen Stabilitätsanalysen kann problematisch sein.
6. Bei großen Imperfektionsamplituden, hier z.B. $|w_0| = t/10$, kann es zu signifikanten Änderungen des Stabilitätsverhaltens kommen. Beispielsweise ist es möglich, dass ein Verzweigungsproblem weit unterhalb von λ_{nl}^c oder ein starker Abfall der Beullast auftreten. Eine allgemein

gültige Aussage, bei welchen Imperfektionsformen bzw. -amplituden es zu solchen Erscheinungen kommt, scheint nicht möglich zu sein. Es ist jedoch zu vermuten, dass insbesondere die in Abschn. 4.5.7 beschriebenen „benachbarten“ Stabilitätsprobleme das Tragverhalten entscheidend beeinflussen können.

7. Durch die Überlagerung von primärem mit imperfektem Tragverhalten kann bei großen Imperfektionsamplituden gerade so ein Verformungs- und Spannungszustand entstehen, der eine Gleichgewichtsverzweigung hervorruft. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint die anzusetzende Imperfektionsamplitude für die numerische Rechnung $w_0 = 1.5t$ nach [13] problematisch. Im Allgemeinen wird davon ausgegangen, dass es sich bei geometrischen Imperfektionen um kleine Abweichungen handelt, die das Stabilitätsverhalten jedoch nicht prinzipiell verändern.

Kapitel 5

Schlussbemerkungen

Numerische Analysen sind aus der täglichen Praxis des konstruktiven Stahlbaus kaum noch wegzudenken. Neben dem Einsatz für Festigkeitsprobleme ist eine zunehmende Verwendung der Finite - Elemente - Methode auch für Stabilitätsprobleme festzustellen.

Werden in der Praxis numerische Stabilitätsanalysen durchgeführt, treten selbst bei Beschränkung auf die üblichen Analysemethoden - der Eigenwertanalyse und der Pfadverfolgung für imperfekte Systeme - numerische Schwierigkeiten und schwer zu interpretierende Sachverhalte auf. Erwähnt seien hier nur zwei Fragestellungen: Warum ergeben sich unterschiedliche kritische Lasten bei Anwendung verschiedener FE - Programme? und Warum treten während einer Pfadverfolgung plötzlich Konvergenzprobleme auf, obwohl der kritische Punkt noch weit entfernt ist?

Die Beantwortung solcher Fragestellungen erfordern vom Ingenieur sowohl zusätzliche Kenntnisse der Stabilitätstheorie als auch ein umfangreiches Wissen zu numerischen Sachverhalten. Daneben ist offensichtlich, dass die üblichen numerischen Analysemöglichkeiten in der Regel nicht ausreichen, um sich ein umfassendes Bild über das Stabilitätsverhalten einer Struktur machen zu können.

Diese Arbeit wurde mit dem Ziel verfaßt, eine Vermittlung zwischen den Anschauungen des praxisorientierten Ingenieurs und den teilweise sehr komplexen Zusammenhängen der Stabilitätstheorie sowie den Methoden der numerischen Stabilitätsanalyse zu erleichtern. Insbesondere sollte deutlich werden, dass es möglich und erfolgversprechend ist, numerische Methoden der Elastostabilität, die im Allgemeinen auf dem Gebiet der theoretischen Mechanik zu finden sind, in den eigenen Methodenvorrat einzubinden.

Bei der Darstellung der erforderlichen stabilitätstheoretischen Grundlagen und der erweiterten Methoden wurde besonders auf eine konsistente, systematische und FEM - nahe Formulierung geachtet. Insbesondere wurde

versucht, bei der Darstellung der Nachbeulanalyse von den Ursprüngen der Methode auszugehen und anschließend eine allgemeinere mathematische Formulierung zu verwenden. Dies führt dazu, dass einige Sachverhalte parallel dargestellt werden. Um jedoch einen Vergleich zu ermöglichen, wurde sich entschieden, beide Herangehensweisen ausführlich zu behandeln, auch wenn die Unterschiede im Endergebnis gering sind.

Der sekundäre Gleichgewichtspfad besitzt bei einer Gleichgewichtsverzweigung eine herausragende Bedeutung. Die Bestimmung des Sekundärpfades kann, wie in der Arbeit beschrieben, anhand einer asymptotischen Näherung bzw. direkt durch einen Pfadwechsel erfolgen. Mit dem Verlauf des Sekundärpfades liegt eine wesentliche Charakteristik des Stabilitätsproblems vor, woraus Schlußfolgerungen zum Imperfektionsverhalten gezogen werden können. Dies ist aus praktischer Sicht insofern bemerkenswert, da hier Imperfektionsaussagen allein durch Analysen des perfekten Systems möglich sind. Damit existiert eine sehr effektive Methode, zielgerichtet und ohne aufwändige Parameterstudien das Imperfektionsverhalten einer Struktur zu untersuchen.

Allerdings bestehen bei der Bestimmung des Sekundärpfades erhebliche Einschränkungen. Der Erfolg einer Pfadwechselprozedur zur „genauen“ Bestimmung des Sekundärpfades ist immer davon abhängig, ob der Sprung vom primären auf den sekundären Pfad gelingt. Eine Empfehlung zur Wahl einer erforderlichen Prädiktorgroße kann nicht gegeben werden. Außerdem ist immer, wie das in der Arbeit behandelte Beispiel eines Schalensegmentes zeigt, zu kontrollieren, auf welchen Gleichgewichtspfad der Sprung tatsächlich erfolgt.

Werden die Ergebnisse der Nachbeulanalyse genutzt, um eine Approximation des Sekundärpfades zu erzeugen, ist die Frage des Pfadparameters zu diskutieren. Bei den behandelten Beispielen, die im Vorbeulbereich im Wesentlichen Membranbeanspruchungen aufwiesen, war dies die maximale Durchbiegungsordinate. Ein zutreffender Pfadparameter kann jedoch nicht allgemein gültig, sondern allenfalls für eine bestimmte Problemklasse festgelegt werden.

Die bekannten Probleme numerischer Differentiationsverfahren wirkten sich sehr nachteilig auf die Berechnung der quadratischen Nachbeulparameter aus. Um dies zu verhindern, wären Ableitungen der Steifigkeitsmatrizen für jeden einzelnen Elementtyp schon in der Elementformulierung bereitzustellen. Dieses war nicht das Ziel der Arbeit, ist jedoch, nicht nur für das verwendete FE - Programm *Siang*, wünschenswert.

Insgesamt zeigte sich, dass das FE - Programm *Siang* sehr gut dafür geeignet ist, die erforderlichen Algorithmen für erweiterte Stabilitätsanalysen Schritt - für - Schritt mit einem vertretbarem Aufwand aufzubauen. Kritisch anzumerken ist lediglich, dass in einigen Fällen, wie an den Beispielalgorithmen deutlich wird, etwas umständlich und rechenzeitintensiv vorgegangen werden

mußte. Dies lag daran, dass die erforderlichen Matrizenoperationen nicht immer zur Verfügung standen.

Besonders wichtig war es, nicht nur die Theorie, sondern auch die Anwendung der Methoden für praktisch interessierende Fragestellungen nachvollziehbar zu demonstrieren. Dabei sollten auch Probleme behandelt werden, die sich dann ergeben, wenn von den üblichen, mehr oder weniger akademischen Modellen abgewichen wird. Die in der Arbeit ausführlich behandelten Beispielanwendungen aus den Bereichen Platten- und Schalenbeulen befassen sich zwar mit Strukturen, die häufig in der Literatur zu finden sind und deren Stabilitätsverhalten im Wesentlichen bekannt ist. Dennoch wurden sie hier verwendet, da damit besonders eindrucksvoll die verschiedenen Möglichkeiten der numerischen Stabilitätsanalysen gezeigt werden können. Werden die FE - Modelle möglichst praxisnah angelegt, sind starke Veränderungen im Stabilitätsverhalten, insbesondere im Nachbeulverhalten, festzustellen.

Während der Erstellung des theoretischen Teils der Arbeit und vor allem bei der Durchführung der numerischen Rechnungen stellte sich die Frage, ob das Thema der gekoppelten Instabilitäten nicht ausführlicher behandelt werden müßte. Teilweise zeigten sich in einigen Rechnungen Probleme, die möglicherweise auf mehrfache kritische Punkte zurückzuführen sind. Der aktuelle Forschungsstand hierzu läßt jedoch eine zuverlässige und ähnlich umfangreiche numerische Behandlung wie bei Einfachsingularitäten noch nicht zu. Deshalb wurde auf weitere Darstellungen zu diesem Thema verzichtet. Für die Zukunft sind auf diesem Gebiet aber Weiterentwicklungen zu erwarten, die dann auch für praktische Problemstellungen mit mehrfachen kritischen Punkten genutzt werden können.

Anhang A

Verkürzte Schreibweise für das Potentialinkrement

Für eine übersichtliche Schreibweise wird das Potentialinkrement folgendermaßen in verschiedene Anteile getrennt, die jeweils nur von Φ , $\bar{\mathbf{u}}$ bzw. von beiden Größen abhängen:

$$\begin{aligned}\Pi_2(\alpha\Phi + \bar{\mathbf{u}}) &= \alpha^2\Pi_2(\Phi) + \alpha\Pi_{11}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \Pi_2(\bar{\mathbf{u}}) \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2\Phi^T \mathbf{K} \Phi + \alpha\Phi^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_3(\alpha\Phi + \bar{\mathbf{u}}) &= \alpha^3\Pi_3(\Phi) + \alpha^2\Pi_{21}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha\Pi_{12}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \Pi_3(\bar{\mathbf{u}}) \\ &= \frac{1}{6}\alpha^3\Phi^T (\mathbf{K}_{,q}\Phi) \Phi + \frac{1}{2}\alpha^2\Phi^T (\mathbf{K}_{,q}\Phi) \bar{\mathbf{u}} \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha\bar{\mathbf{u}}^T (\mathbf{K}_{,q}\Phi) \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{6}\bar{\mathbf{u}}^T (\mathbf{K}_{,q}\bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_4(\alpha\Phi + \bar{\mathbf{u}}) &= \alpha^4\Pi_4(\Phi) + \alpha^3\Pi_{31}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha^2\Pi_{22}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha\Pi_{13}(\Phi, \bar{\mathbf{u}}) + \Pi_4(\bar{\mathbf{u}}) \\ &= \frac{1}{24}\alpha^4\Phi^T (\mathbf{K}_{,qq}\Phi\Phi) \Phi + \frac{1}{6}\alpha^3\Phi^T (\mathbf{K}_{,qq}\Phi\Phi) \bar{\mathbf{u}} \\ &\quad + \frac{1}{4}\alpha^2\bar{\mathbf{u}}^T (\mathbf{K}_{,qq}\Phi\Phi) \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{6}\alpha\bar{\mathbf{u}}^T (\mathbf{K}_{,qq}\Phi\bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} \\ &\quad + \frac{1}{24}\bar{\mathbf{u}}^T (\mathbf{K}_{,qq}\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

Anhang B

Einführendes Beispiel: 2-DOF-Stabsystem

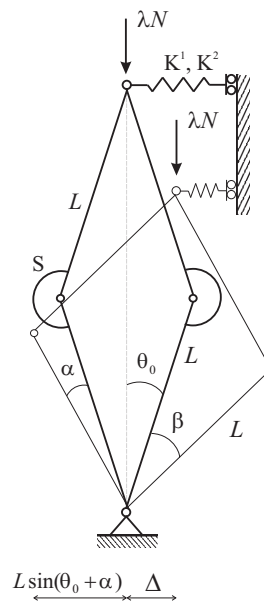


Abbildung B.1: 2-DOF-System aus [43]

In [43] wurden Stabilitätsanalysen auf analytischem Wege für ein Starrkörpersystems nach Abb.B.1 durchgeführt. Dieses mehr akademische Beispiel wird hier aufgegriffen, um die in Kapitel 2 beschriebenen Sachverhalte zu veranschaulichen.

Das System besteht aus 4 biege- und dehnstarren Stäben, die gelenkig miteinander verbunden sind. Der Verformungszustand des Starrkörpersystem kann allein durch zwei Freiheitsgrade beschrieben werden.

Sie werden definiert als die beiden Verdrehwinkel:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Die (theoretische) Systemsteifigkeit resultiert allein aus Drehfedern mit der Federsteifigkeit S und nichtlinearen Wegfedern, charakterisiert durch die Federsteifigkeiten K^1 und K^2 . Damit ergeben sich folgende Federkräfte:

$$\begin{aligned} M &= S\alpha \\ F &= K^1\Delta + K^2\Delta^2. \end{aligned}$$

Das System wird belastet durch eine äußere Kraft λN . Für die konkrete Rechnung wurden folgende Parameter gewählt:

$$L = 1.0, \quad S = 0.5, \quad K^1 = 1.0, \quad K^2 = 0.5, \quad N = 1.0, \quad \theta_0 = 10^\circ.$$

In [43] wurde von einem exaktem Ausdruck für das Potential ausgegangen. Um möglichst nahe an den Formulierungen des Kapitels 2 zu bleiben, wird im Folgenden ein approximierter Potentialausdruck verwendet.

Zuerst soll hier jedoch der unter den gegebenen Randbedingungen exakte Potentialausdruck angegeben werden. Er lautet unter Berücksichtigung von geometrischen Zusammenhängen, auf die hier nicht näher eingegangen wird:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{q}, \lambda) &= S(\alpha + \beta)^2 + \frac{1}{2}K^1L^2 [\sin(\theta_0 + \beta) - \sin(\theta_0 + \alpha)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}K^2L^3 [\sin(\theta_0 + \beta) - \sin(\theta_0 + \alpha)]^3 \\ &\quad - \lambda LN [2 \cos(\theta_0) - \cos(\theta_0 + \alpha) - \cos(\theta_0 + \beta)]. \end{aligned}$$

Hieraus können die Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet und nach evtl. Lösungen gesucht werden. Der primäre Last-Verformungspfad kann dann durch folgende, über s parametrisierte Funktionen angegeben werden [43]:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \Pi_{,\alpha} \\ \Pi_{,\beta} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}^p(s) = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}, \quad \lambda^p(s) = \frac{2s}{\sin(\theta_0 + s)}.$$

Eine direkte Abhängigkeit $\mathbf{q}^p(\lambda)$ läßt sich nicht herstellen.

Zur Suche nach einem kritischen Punkt auf dem primären Pfad wird in Anwendung von Gl.(2.18) folgendes Determinantenkriterium verwendet:

$$|\mathbf{G}_{,\mathbf{q}}| = |\mathbf{K}(\mathbf{q}^p(s), \lambda(s))| = 0$$

Der erste kritische Punkt wird exakt ermittelt zu:

$$s^c = 0.484 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}^c = \begin{pmatrix} 0.484 \\ 0.484 \end{pmatrix}, \quad \lambda^c = 1.582.$$

In [43] werden im Weiteren am kritischen Punkt, einem einfachen Verzweigungspunkt, Stabilitätsuntersuchungen angestellt.

Im Unterschied zu [43] wird hier von einem approximierten Potentialausdruck $\tilde{\Pi}$ ausgegangen. Dazu werden die trigonometrischen Funktionen des ursprünglichen Ausdrucks durch ihre Reihenentwicklungen ersetzt. Berücksichtigt man Terme bis zur 4. Ordnung, lautet die Näherung nach Gl.(2.2):

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(\alpha, \beta, \lambda) &= A_1\alpha + A_2\beta + \frac{1}{2}(A_{11}\alpha^2 + 2A_{12}\alpha\beta + A_{22}\beta^2) \\ &+ \frac{1}{6}(A_{111}\alpha^3 + 3A_{112}\alpha^2\beta + 3A_{122}\alpha\beta^2 + A_{222}\beta^3) \\ &+ \frac{1}{24}(A_{1111}\alpha^4 + 4A_{1112}\alpha^3\beta + 6A_{1122}\alpha^2\beta^2 + 4A_{1222}\alpha\beta^3 + A_{2222}\beta^4). \end{aligned}$$

Die einzelnen Koeffizienten nach Gl.(2.3) sind:

A_1	$\check{A}_1(\lambda)$	0.17365λ
A_2	$\check{A}_2(\lambda)$	0.17365λ
A_{11}	$\bar{A}_{11} + \check{A}_{11}(\lambda)$	$1.96985 - 0.98481\lambda$
A_{12}	\bar{A}_{12}	0.0301537
A_{22}	$\bar{A}_{22} + \check{A}_{22}(\lambda)$	$1.96985 - 0.98481\lambda$
A_{111}	$\bar{A}_{111} + \check{A}_{111}(\lambda)$	$-1.46814 + 0.17365\lambda$
A_{112}	\bar{A}_{112}	1.12612
A_{122}	\bar{A}_{122}	-0.78410
A_{222}	$\bar{A}_{222} + \check{A}_{222}(\lambda)$	$0.44208 + 0.17365\lambda$
A_{1111}	$\bar{A}_{1111} + \check{A}_{1111}(\lambda)$	$-2.77845 + 0.98481\lambda$
A_{1112}	\bar{A}_{1112}	0.46461
A_{1122}	\bar{A}_{1122}	-0.030154
A_{1222}	\bar{A}_{1222}	1.47508
A_{2222}	$\bar{A}_{2222} + \check{A}_{2222}(\lambda)$	$-4.79939 + 0.98481\lambda$

Tabelle B.1: Koeffizienten in der Potentialapproximation

Aus $\tilde{\Pi}$ werden wieder entsprechend Gl.(2.5) die Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \tilde{\Pi}_{,\alpha} \\ \tilde{\Pi}_{,\beta} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Eine Auflösung der nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen ist hier nicht möglich. Deshalb wird, ausgehend vom unbelasteten unverformten Zustand „0“, der primäre Last-Verformungspfad approximiert. Die Gleichgewichtsbedingungen 3. Ordnung erlauben eine Pfadapproximation 3. Ordnung. Die Pfadfunktion in parametrischer Darstellung lautet:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}^p(s) &= \begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{q}}s + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}s^2 + \frac{1}{6}\dddot{\mathbf{q}}s^3 \\
&= \begin{pmatrix} 0.073978 \\ 0.073978 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0.0264453 \\ 0.0264453 \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} 0.0076395 \\ 0.0076395 \end{pmatrix} s^3 \\
\lambda^p(s) &= \dot{\lambda}s + \frac{1}{2}\ddot{\lambda}s^2 + \frac{1}{6}\dddot{\lambda}s^3 \\
&= 0.852044s - 0.0528905s^2 - 0.0152789s^3.
\end{aligned}$$

Für den Pfadparameter s wurde die folgende lineare Normierungsbedingung eingeführt:

$$s = \alpha + \beta + \lambda.$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} setzt sich nach Gl.(2.13) zusammen aus den Anteilen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0 &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} A_{111}\alpha + A_{112}\beta & A_{112}\alpha + A_{122}\beta \\ A_{112}\alpha + A_{122}\beta & A_{122}\alpha + A_{222}\beta \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} A_{1111}\alpha^2 + 2A_{1112}\alpha\beta + A_{1122}\beta^2 & A_{1112}\alpha^2 + 2A_{1122}\alpha\beta + A_{1222}\beta^2 \\ A_{1112}\alpha^2 + 2A_{1122}\alpha\beta + A_{1222}\beta^2 & A_{1122}\alpha^2 + 2A_{1222}\alpha\beta + A_{2222}\beta^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

\mathbf{K} ist symmetrisch und enthält neben konstanten auch von λ abhängige Terme.

Mit Blick auf die numerische Stabilitätsanalyse werden zur Ermittlung des kritischen Punktes auf dem primären Pfad verschiedene Varianten miteinander verglichen:

- Analyse der nichtlinearen Steifigkeitsmatrix entlang des primären Pfades entsprechend einer nichtlinearen Stabilitätsanalyse,

- Linearisierung des Primärpfades + linearisiertes verallgemeinertes Eigenproblem,
- Berücksichtigung des Primärpfades 2. Ordnung + quadratisches verallgemeinertes Eigenproblem.

Für die nichtlineare Stabilitätsanalyse wurde die Determinante $|\mathbf{K}|$ entlang des nichtlinearen Pfades ausgewertet. Der Nulldurchgang wurde ermittelt bei:

$$s^c = 2.451 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}^c = \begin{pmatrix} 0.453 \\ 0.453 \end{pmatrix}, \quad \lambda^c = 1.546.$$

In der numerischen Stabilitätsanalyse entspricht dieses Vorgehen einer begleitenden Stabilitätsuntersuchung im Laufe der Pfadverfolgung, wobei neben der Beobachtung der Determinante von \mathbf{K} weitere Kontrollmöglichkeiten, beispielsweise die laufende Überprüfung des ersten Standardeigenwertes, existieren. Die Auflösung des Standardeigenproblems am kritischen Punkt ergibt hier:

$$\mathbf{K}\Phi = \omega\Phi \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 2.166 e - 4 \approx 0, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0.70711 \\ -0.70711 \end{pmatrix}.$$

Dabei wurde der Singulärvektor Φ auf die Länge 1 normiert. Das Verschwinden des kleinsten Eigenwertes ω_1 zeigt den kritischen Punkt an, was gleichbedeutend mit der Singularitätsbedingung nach Gl.(2.19) ist:

$$\Pi_2(\Phi) = \frac{1}{2}\Phi^T \mathbf{K}\Phi = \frac{1}{2}\omega_1 \approx 0.$$

Neben der nichtlinearen Stabilitätsanalyse, die den „exakten“ kritischen Punkt liefert, sollen im Folgenden zum Vergleich zwei Näherungen untersucht werden.

Dazu wird als erstes für den Primärpfad ein linearer Verlauf angenommen:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^p(s) &= \dot{\mathbf{q}}s = \begin{pmatrix} 0.073978 \\ 0.073978 \end{pmatrix} s \\ \lambda_1^p(s) &= \dot{\lambda}s = 0.852044 \quad s. \end{aligned}$$

Wird auch die Steifigkeitsmatrix linearisiert, ergibt sich das klassische, häufig in der Praxis angewendete verallgemeinerte Eigenproblem:

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(s)] \Phi = \mathbf{0}.$$

Hierin ist \mathbf{K}_0 eine konstante, \mathbf{K}_1 eine von s linear abhängige Matrix:

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_1(s) = s \begin{bmatrix} \check{A}_{11}\acute{\lambda} + \bar{A}_{111}\acute{\alpha} + \bar{A}_{112}\acute{\beta} & \bar{A}_{112}\acute{\alpha} + \bar{A}_{122}\acute{\beta} \\ \bar{A}_{112}\acute{\alpha} + \bar{A}_{122}\acute{\beta} & \check{A}_{22}\acute{\lambda} + \bar{A}_{122}\acute{\alpha} + \bar{A}_{222}\acute{\beta} \end{bmatrix}.$$

Somit lautet das Eigenproblem:

$$\left(\begin{bmatrix} 1.9698 & 0.0301 \\ 0.0301 & 1.9698 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -0.8644 & 0.0253 \\ 0.0253 & -0.8644 \end{bmatrix} \right) \Phi = \mathbf{0}$$

Die Auflösung ergibt:

$$s^c = 2.18 \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0.70711 \\ -0.70711 \end{pmatrix}.$$

Die Approximation des kritischen Punktes lautet damit:

$$\mathbf{q}^c = \begin{pmatrix} 0.161 \\ 0.161 \end{pmatrix}, \quad \lambda^c = 1.857 > 1.546.$$

Aufgrund der getroffenen Annahme und der Linearisierung des Eigenproblems werden hier der kritische Punkt um etwa 25% zu hoch, die Verformungen im kritischen Punkt dagegen erheblich zu niedrig eingeschätzt.

Anstelle der linearen wird nun eine quadratische Approximation des Primärpfades verwendet:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2^p(s) &= \dot{\mathbf{q}}s + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}s^2 = \begin{pmatrix} 0.073978 \\ 0.073978 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0.0264453 \\ 0.0264453 \end{pmatrix} s^2 \\ \lambda_2^p(s) &= \acute{\lambda}s + \frac{1}{2}\acute{\acute{\lambda}}s^2 = 0.852044s - 0.0528905s^2. \end{aligned}$$

Beschränkt man sich bei den Anteilen der Steifigkeitsmatrix auf die linearen und quadratischen Terme ist das folgende nichtlineare Eigenproblem zu lösen:

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(s) + \mathbf{K}_2(s)] \Phi = \mathbf{0}$$

Hierin ist zusätzlich:

$$\mathbf{K}_2(s) = s^2 \begin{bmatrix} \check{A}_{11}\dot{\lambda} + \bar{A}_{111}\dot{\alpha} + \bar{A}_{112}\dot{\beta} + \check{A}_{111}\dot{\lambda}\dot{\alpha} & \bar{A}_{112}\dot{\alpha} + \bar{A}_{122}\dot{\beta} \\ +\frac{1}{2}\left(\bar{A}_{1111}\dot{\alpha}^2 + 2\bar{A}_{1112}\dot{\alpha}\dot{\beta} + \bar{A}_{1122}\dot{\beta}^2\right) & +\frac{1}{2}\left(\bar{A}_{1112}\dot{\alpha}^2 + 2\bar{A}_{1122}\dot{\alpha}\dot{\beta} + \bar{A}_{1222}\dot{\beta}^2\right) \\ \bar{A}_{112}\dot{\alpha} + \bar{A}_{122}\dot{\beta} & \check{A}_{22}\dot{\lambda} + \bar{A}_{222}\dot{\beta} + \bar{A}_{122}\dot{\alpha} + \check{A}_{222}\dot{\lambda}\dot{\beta} \\ +\frac{1}{2}\left(\bar{A}_{1112}\dot{\alpha}^2 + 2\bar{A}_{1122}\dot{\alpha}\dot{\beta} + \bar{A}_{1222}\dot{\beta}^2\right) & +\frac{1}{2}\left(\bar{A}_{2222}\dot{\beta}^2 + 2\bar{A}_{1222}\dot{\alpha}\dot{\beta} + \bar{A}_{1122}\dot{\alpha}^2\right) \end{bmatrix}.$$

Das Eigenproblem lautet:

$$\left(\begin{bmatrix} 1.9698 & 0.0301 \\ 0.0301 & 1.9698 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -0.8644 & 0.0253 \\ 0.0253 & -0.8644 \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} 0.0488 & 0.0142 \\ 0.0142 & 0.0488 \end{bmatrix} \right) \Phi = \mathbf{0}$$

Sollen solche nichtlinearen Eigenprobleme innerhalb der numerischen Rechnung gelöst werden, sind spezielle mathematische Algorithmen notwendig. Hier kann das quadratische Eigenproblem noch analytisch gelöst werden:

$$s^c = 2.405 \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0.70711 \\ -0.70711 \end{pmatrix}.$$

Der kritische Punkt auf dem quadratisch approximierten Primärpfad liegt bei:

$$\mathbf{q}^c = \begin{pmatrix} 0.331 \\ 0.331 \end{pmatrix}, \quad \lambda^c = 1.743 > 1.546.$$

Während die Verformungen am kritischen Punkt wesentlich besser approximiert werden als im vorhergehenden Fall, ist auch hier immer noch eine etwa 13%-ige Überschätzung der kritischen Lasthöhe zu verzeichnen.

Die Ergebnisse der hier gezeigten analytischen Variantenuntersuchung zur Ermittlung des kritischen Punktes lassen sich auf die numerische Stabilitätsanalyse übertragen. Die Untersuchungen belegen den großen Einfluß der Annahmen zum Verlauf des primären Pfades und die Bedeutung des verwendeten Eigenproblems bei der Ermittlung des kritischen Punktes. In der Praxis wird häufig, trotz eines nichtlinearen Verlaufes des Primärpfades, ein klassisches, linearisiertes verallgemeinertes Eigenproblem gelöst. Nichtlineare Primärpfade treten hauptsächlich bei jenen stabilitätsgefährdeten Strukturen auf, die neben den Membran- auch Biegeverformungen aufweisen. Eine Linearisierung des Problems kann in solchen Fällen, wie das Beispiel zeigt,

zu erheblichen Fehleinschätzungen führen. Dies kann, neben der hier aufgetretenen Überschätzung des kritischen Lastniveaus, ebenfalls zu „falschen“ Singulärvektoren führen.

Abschließend soll anhand dieses Beispiels noch die Stabilitätsanalyse im kritischen Punkt nach Abschn. 2.4.3 durchgeführt werden. Dazu ist im kritischen Punkt der kubische Term $\Pi_3(\mathbf{u})$ aus der Reihenentwicklung nach Gl.(2.11) zu untersuchen. Hierfür wird die Ableitung der Steifigkeitsmatrix nach Gl.(2.14) für $\mathbf{u} = \Phi$ benötigt:

$$(\mathbf{K}_{,q}\Phi)^c = \begin{bmatrix} \left(\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha} \right]^c \Phi \right) & \left(\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \beta} \right]^c \Phi \right) \end{bmatrix}$$

Hierin sind:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha} \right]^c = \frac{\partial \mathbf{K}_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \mathbf{K}_2 \right)}{\partial \alpha}, \quad \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \beta} \right]^c = \frac{\partial \mathbf{K}_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \mathbf{K}_2 \right)}{\partial \beta}.$$

Die Auswertung von $\Pi_3(\Phi)$ im „exakten“ kritischen Punkt bei $s^c = 2.451$ ergibt:

$$\Pi_3(\Phi) = \frac{1}{6} \Phi^T (\mathbf{K}_{,q}\Phi) \Phi = -0.16302 \neq 0.$$

Damit handelt es sich hier um einen **instabilen kritischen Punkt**.

Anhang C

Berechnungsalgorithmus für eine Pfadverfolgung

Für die Verfolgung von Gleichgewichtspfaden wurde innerhalb dieser Arbeit der Algorithmus `critical-point.s` eingesetzt. Zur seiner Erstellung konnte im Wesentlichen auf einen bereits bestehenden, in der Beispielsammlung des FE - Programms `Stang` dokumentierten Berechnungsablauf zurückgegriffen werden, der auf Angaben in [61] basiert.

```
%%% File: critical-point.s  %%%
```

```
string create,, 30, model/  
string read,, model K20,/br/>string append,, 2 model ".save", filename/  
structure restore,, filename,/
```

Einlesen des vollständigen FE - Modells, hier z.B. `K20.save`
(nodes, elements, restraints, constraints etc.)

```
control gosub,, initialize,/
```

```
#label gofurther
```

```
control gosub,, linear_predictor,/
```

```
control gosub,, corrector_iterations,/
```

```
control gosub,, post_processing,/
```

```
control if,, failure 0 gofurther, /
```

```
control exit,,, /
```

gofurther: Top - Routine der inkrementell - iterativen Pfadverfolgung mittels Bogenlängenverfahrens, bestehend aus linearem Prädiktorschritt und anschließender Korrekturiteration.

```
#label initialize
```

```
monitor allocate, replace, 3, /
```

```
monitor create,, 1 0.05 0.10 0.25 0.40, st_eigenvalue_1 /
```

```
monitor create,, 2 0.67 0.10 0.30 0.40, disp_middle /
```

```
monitor create,, 3 0.45 0.55 0.50 0.40, structure /
```

```
structure view, scale, 3 10 45 0, /
```

```
element build, stiffness total,, /
```

```
global restraints, remove_rot_singular,, /
```

```
global matrix, stiffness,, comp_k /
```

```
compact factorize,, comp_k, sky_k /
```

```
global vector, load, 2 loads_front 0.5 loads_back 0.5, global_1 /
```

```
node extract,,, save_disp /
```

```
object create, real,, save_lambda /
```

```
object read,, save_lambda 0.0, /
```

```
object create, real,, lambda /
```

```
object read,, lambda 0.0, /
```

```
object create, real,, epsilon_norm /
```

```
object read,, epsilon_norm 1e-5, /
```

```
linalg norm,, global_1, compare_norm /
```

```
object create, real,, arclength /
```

```
object read,, arclength 0.1, /
```

```
object create, real,, direction /
```

```
object read,, direction 1.0, /
```

```
object create, real matrix, 1 3 full_results /
```

```
object create, real matrix, 1 3 actual_results /
```

```
compact factorize,, comp_k, sky_k /
```

```
compact iteigenstsy, skyline, comp_k sky_k 1,
```

```
st_eigenvalue_1 st_eigenvector_1 /
```

```
object modify, set, full_results (1 1) save_lambda, /
```

```
object modify, set, full_results (1 2) st_eigenvalue_1, /
```

```
node extract, single displacements trans_dof, middle_node,
```

```
disp_middle_node /
```

```
object modify, set, full_results (1 3) disp_middle_node (2), /
```

```

object create, integer,, number/
object read,, number 0,/
object copy,, save_disp, save_disp_all/
object copy,, save_lambda, save_lambda_all/
control return,,,/

```

initialize: Definition und Initialisierung von Objekten: Startwerte bzw. Vorgaben für das inkrementell - iterative Bogenlängenverfahren wie z.B. `save_lambda` bzw. `arclength`, für das Post-Processing z.B. `results` oder `save_disp_all` und die Monitore für die Ausgabe sowie allgemeine Größen wie z.B. die Initialsteifigkeitsmatrix `comp_k` in kompakter Speicherform.

```

#label linear_predictor
object create, real replace,, d_lambda/
compact solve,, sky_k global_1, d_vp/
linalg norm, replace, d_vp, s0/
object modify, set, d_lambda \mul direction \div arclength s0,/
node extract, doflist displacements replace,, disp/
linalg lincomb,, 2 disp 1 d_vp d_lambda, actual_disp/
node merge, doflist displacements, actual_disp,/
object modify, add, lambda d_lambda,/
element build, res_force total,,/
global vector, res_force,, restoring_force/
linalg lincomb,, 2 global_1 \chs lambda restoring_force 1,
    global_dforce/
object copy,, actual_disp, predictor_disp/
object copy,, lambda, predictor_lambda/
object delete,, actual_disp,/
object delete,, d_lambda,/
object delete,, s0,/
object delete,, d_vp,/
object delete,, restoring_force,/
control return,,,/

```

linear_predictor: Routine zur Berechnung des Prädiktorschrittes für den Verformungszustand `predictor_disp` und den zugehörigen Lastfaktor `predictor_lambda`. Für die Korrekturiteration wird der Ungleichgewichtsvektor `global_dforce` zwischen der Belastung und den Rückstellkräften aus dem Prädiktorschritt berechnet. Der Prädiktor wurde in dieser Beispielroutine als konstant und linear angenommen.

```

#label corrector_iterations
object create, integer,, failure/
object create, integer,, it_count/
object read,, it_count 0,/
object create, real,, d_lambda/
node extract,,, actual_disp/

#label corrector_iteration_loop
object modify, add, it_count 1,/
control if, greater, it_count 100 failure,/
element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness,, comp_k/
compact factorize,, comp_k, sky_k/
compact solve, replace, sky_k global_l, d_vp/
compact solve, replace, sky_k global_dforce, d_vg/
object operate, \chs, d_vg,/

control gosub,, corrector_function,/

linalg multiply, replace trans_first, func_v d_vg, a_corr/
linalg multiply, replace trans_first, func_v d_vp, b_corr/
object modify, set, d_lambda \chs \div \add func a_corr \add
    func_lambda b_corr,/
object delete,, func,/
object delete,, func_lambda,/
object delete,, func_v,/
object delete,, a_corr,/
object delete,, b_corr,/
object modify, add, lambda d_lambda,/
linalg lincomb,, 3 actual_disp 1 d_vp d_lambda d_vg 1,
    actual_disp/
object delete,, d_vg,/
object delete,, d_vp,/
node merge, doflist displacements, actual_disp,/
element build, res_force total,,/
global vector, res_force,, restoring_force/
linalg lincomb,, 2 global_l \chs lambda restoring_force 1,
    global_dforce/
linalg norm, replace, global_dforce, diff_morn/
output print,, diff_norm,/
control if, real less, 100000 \div diff_norm
    compare_norm failure,/
control if, real less, epsilon_norm diff_norm

```



```

corrector_iteration_loop,/

element build, stiffness total,,/
global matrix, stiffness,, comp_k/
compact factorize,, comp_k, sky_k/
compact iteigenstsy, skyline, comp_k sky_k 1,
    st_eigenvalue_1 st_eigenvector_1/
control if, less real, st_eigenvalue_1 0.0 stop_calculation,/
object copy, replace, actual_disp, save_disp/
object copy, replace, lambda, save_lambda/
object delete,, diff_norm,/
object delete,, actual_disp,/
object delete,, restoring_force,/
object delete,, d_lambda,/
control return,,/

```

corrector_iterations: Die Unteroutine enthält die erforderlichen Berechnungsschritte für die Korrekturiteration. Innerhalb der Schleife `corrector_iteration_loop` wird, ausgehend vom Prädiktorschritt, sowohl das Lastinkrement (`d_lambda`) als auch das Verformungsinkrement (`d_vp d_lambda + d_vg`) verändert. Die zugehörige Berechnungsvorschrift wird durch den Aufruf der Unteroutine `corrector_function` realisiert. Anhand von Konvergenzkriterien erfolgt schließlich der Abruch der Gleichgewichtsiteration bei fehlender Konvergenz bzw. bei erfolgreicher Gleichgewichtsiteration.

```

#label corrector_function
object create, real,, func/
object create, real,, func_lambda/
linalg lincomb, replace, 2 actual_disp 1 save_disp -1,
    delta_disp/
linalg norm, replace, delta_disp, disp_norm/
object operate, \pow, disp_norm 2,/
linalg norm, replace, predictor_disp, psi/
object operate, \div, psi \mul 2 predictor_lambda,/
object create, real,, lambda_norm/
object modify, set, lambda_norm \pow \sub lambda save_lambda 2,/
object operate, \mul, lambda_norm \pow psi 2,/
object modify, set, func \sub \sqr \add disp_norm
    lambda_norm arclength,/
linalg lincomb, replace, 1 delta_disp \div 1 \add

```

```

        func arclength, func_v/
object modify, set, func_lambda \sub lambda save_lambda,/
object operate, \mul, func_lambda \div \pow psi 2
        \add func arclength,/
control return,,,/

```

corrector_function: Hier erfolgt die Berechnung des Last- bzw. Verformungsinkrementes innerhalb der Gleichgewichtsiteration. Als Nebenbedingung wird Gl.(3.4) verwendet, der Korrekturfaktor ψ wird nach Gl.(3.5) ermittelt.

```

#label failure
object modify, set, failure 1,/
control message,, "No convergence",/
control return,,,/

```

```

#label stop_calculation
control message,, "1. eigenvalue < 0",/

```

```

#label post_processing
object modify, set, actual_results (1 1) save_lambda,/
object modify, set, actual_results (1 2) st_eigenvalue_1,/
node extract, replace single displacements trans_dof,
        middle_node, disp_middle_node/
object modify, set, actual_results (1 3) disp_middle_node (2),/
object append, add_rows, full_results actual_results,/
output view, phase_plot title grid_both, 1 full_results 2
        "first_eigenvalue - load",/
output view phase_plot title grid_both, 2 full_results 3
        "disp_middle - load",/
object append, add_columns, save_disp_all save_disp,/
object append, add_rows, save_lambda_all save_lambda,/
structure view, reference nonodes nosymbols, 3 10 45 0 1.0,/
object modify, add, number 1,/
string convert, replace int_string no_space, number, nr/
string append, replace, 4 model "_primary_" nr ".rst", filename/
output file, noappend binary, save_disp_all, filename/
output file, append binary, save_lambda_all, filename/
output file, append binary, full_results, filename/
control return,,,/

```

post_processing: Anzeige der Verläufe des 1. Standard-eigenwertes der tangentiellen Steifigkeitsmatrix und eines speziellen Verformungsfreiheitsgrades gegenüber dem Lastfaktor und Abspeichern der ermittelten Gleichgewichtskonfigurationen.

Innerhalb der numerischen Stabilitätsanalyse ist der erste kritische Punkt auf dem primären Pfad möglichst genau zu ermitteln. Aus dem Verlauf des ersten kritischen Eigenwertes läßt sich die Annäherung an den kritischen Punkt im Allgemeinen gut erkennen. In der praktischen Anwendung der vorstehenden Routine wurde zur Genauigkeitssteigerung in der Regel während der Berechnung die Bogenlänge `arclength` verkleinert. Auf spezielle Algorithmen zur Verbesserung der Genauigkeit wie Bisektionsverfahren oder automatische Schrittweitensteuerung [11] wurde hier verzichtet, eine Einbindung solcher Verfahren in die vorstehende Routine gestaltet sich jedoch unproblematisch.

Anhang D

Dokumentation von Rechenergebnissen

D.1 Plattenbeulen - Lastfall konstante Druckspannung

b/t	σ_{xPi} [kN/cm ²]	λ^c	$\dot{\lambda}^s$	$\dot{\lambda}^s$	K^s/K^p
50	47.450	47.481	-9.0366-09	0.5167	0.06102
55	39.215	39.274	-3.0843e-08	0.4978	0.06275
60	32.951	33.023	-2.7177e-08	0.4755	0.06406
65	28.077	28.152	-1.5900e-08	0.4514	0.06508
70	24.209	24.284	-6.7191e-10	0.4268	0.06589
75	21.089	21.161	-5.4122e-09	0.4024	0.06655
80	18.535	18.603	-1.7152e-08	0.3788	0.06709
85	16.419	16.483	8.0220e-09	0.3562	0.06753
90	14.645	14.705	-1.5210e-08	0.3348	0.06791
95	13.144	13.200	1.7491e-08	0.3146	0.06822
100	11.863	11.914	-5.9323e-09	0.2957	0.06849

Tabelle D.1: $\alpha = 0.5$, **RB 0**

b/t	σ_{xPi}	λ^c	$\dot{\lambda}^s$	$\dot{\lambda}^s$	K^s/K^p
50	30.368	30.505	1.7028-08	1.4832	0.34288
55	25.098	25.218	4.8509e-08	1.3329	0.34342
60	21.089	21.195	-8.1298e-08	1.1994	0.34384
65	17.969	18.062	-3.3187e-08	1.0816	0.34417
70	15.494	15.576	5.4413e-09	0.9777	0.34443
75	13.497	13.570	4.3893e-09	0.8863	0.34464
80	11.863	11.928	1.1216e-08	0.8057	0.34481
85	10.508	10.567	-1.2851e-08	0.7345	0.34495
90	9.373	9.426	-9.9465e-09	0.6716	0.34507
95	8.412	8.460	8.8020e-10	0.6158	0.34518
100	7.592	7.636	1.117e-09	0.5663	0.34526 0.34179 [33]

Tabelle D.2: $\alpha = 1.0$, **RB 0**

b/t	σ_{xPi}	λ^c	$\dot{\lambda}^s$	$\dot{\lambda}^s$	$\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p$
50	30.368	30.496	-1.8411-08	1.5454	0.37955
55	25.098	25.211	1.3235e-08	1.3883	0.38005
60	21.089	21.189	2.5754e-09	1.2491	0.38043
65	17.969	18.058	1.2418e-08	1.1262	0.38073
70	15.494	15.572	4.7727e-09	1.0179	0.38097
75	13.497	13.567	-3.1097e-09	0.9226	0.38116
80	11.863	11.925	5.8937e-10	0.8386	0.38132
85	10.508	10.564	6.5760e-09	0.7645	0.38145
90	9.373	9.424	2.8072e-10	0.6990	0.38156
95	8.412	8.458	5.9358e-09	0.6409	0.38165
100	7.592	7.634	5.0948e-09	0.5893	0.38173 0.37587 [33]

Tabelle D.3: $\alpha = 2.0$, **RB 0**

b/t	RB c05a			RB c05b		
	$\dot{\lambda}^s$	$\dot{\lambda}^s$	$\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p$	$\dot{\lambda}^s$	$\dot{\lambda}^s$	$\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p$
50	4.7178e-08	4.1013	0.34031	-5.2947e-08	4.1764	0.34439
55	-8.5171e-09	3.8503	0.34114	5.3701e-08	3.9207	0.34522
60	-1.3627e-08	3.6070	0.34177	4.7876e-09	3.6728	0.34585
65	2.9675e-08	3.3742	0.34226	1.8469e-08	3.4357	0.34634
70	1.0693e-08	3.1537	0.34265	-4.0838e-09	3.2111	0.34673
75	8.4837e-09	2.9465	0.34297	2.1699e-08	3.0001	0.34705
80	-3.7051e-08	2.7528	0.34323	7.3731e-09	2.8029	0.34731
85	-2.1047e-08	2.5727	0.34345	1.0972e-08	2.6195	0.34752
90	1.1611e-08	2.4056	0.34363	-1.5685e-08	2.4493	0.34770
95	8.7649e-09	2.2509	0.34378	-1.1589e-11	2.2919	0.34786
100	-6.9842e-09	2.1081	0.34391	-2.6676e-09	2.1464	0.34799

Tabelle D.4: Ergebnisse der Nachbeulanalyse: $\alpha = 0.5$, **RB c05a** und **c05b**

b/t	RB c1a			RB c1b		
	$\dot{\lambda}^s$	$\dot{\lambda}^s$	$\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p$	$\dot{\lambda}^s$	$\dot{\lambda}^s$	$\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p$
50	6.6903e-09	1.9662	0.40887	1.8271e-08	2.8365	0.49947
55	-2.3383e-08	1.7659	0.40933	4.1545e-08	2.5462	0.49980
60	-1.3718e-08	1.5885	0.40968	-2.3998e-08	2.2894	0.50006
65	6.8835e-08	1.4319	0.40995	1.3199e-08	2.0631	0.50026
70	2.7226e-08	1.2941	0.41017	-1.1469e-08	1.8641	0.50042
75	-1.7870e-08	1.1728	0.41034	8.7886e-09	1.6890	0.50054
80	1.2313e-08	1.0660	0.41048	1.9198e-08	1.5348	0.50065
85	-3.9164e-08	0.9717	0.41060	-2.0004e-08	1.3989	0.50074
90	1.1802e-08	0.8884	0.41070	2.7615e-09	1.2788	0.50081
95	-1.5366e-08	0.8145	0.41079	6.3598e-09	1.1724	0.50087
100	-1.0750e-08	0.7489	0.41086	2.9543e-10	1.0778	0.50092

Tabelle D.5: Ergebnisse der Nachbeulanalyse: $\alpha = 1.0$, **RB c1a** und **c1b**

b/t	RB c2a			RB c2b		
	$\dot{\lambda}^s$	$\dot{\lambda}^s$	$\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p$	$\dot{\lambda}^s$	$\dot{\lambda}^s$	$\mathbf{K}^s/\mathbf{K}^p$
50	1.4896e-08	1.7660	0.41144	-1.0860e-08	2.5325	0.50062
55	-2.2718e-08	1.5861	0.41189	-5.2076e-09	2.2733	0.50095
60	8.3066e-10	1.4267	0.41224	9.5960e-09	2.0441	0.50121
65	4.2681e-09	1.2861	0.41251	8.3941e-09	1.8420	0.50141
70	1.3839e-08	1.1624	0.41272	-5.8738e-09	1.6643	0.50156
75	5.8025e-09	1.0534	0.41290	1.6589e-09	1.5080	0.50169
80	-1.2604e-09	0.9574	0.41304	-1.0075e-09	1.3704	0.50180
85	8.3384e-10	0.8728	0.41316	3.8357e-09	1.2491	0.50188
90	2.9667e-12	0.7980	0.41326	-3.9481e-09	1.1418	0.50196
95	-4.161e-09	0.7316	0.41334	8.1464e-09	1.0468	0.50202
100	-1.4407e-09	0.6727	0.41341	-5.6487e-09	0.9624	0.50207

Tabelle D.6: Ergebnisse der Nachbeulanalyse: $\alpha = 2.0$, **RB c2a** und **c2b**

b/t	$\alpha = 0.5$			$\alpha = 1.0$			$\alpha = 2.0$		
	λ^c	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	λ^c	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	λ^c	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$
50	46.473	-	-	29.877	-	1.036	30.033	-	1.038
55	38.530	-	-	24.751	-	1.082	24.868	-	1.087
60	32.460	-	1.016	20.838	1.027	1.131	20.928	1.028	1.139
65	27.717	-	1.045	17.784	1.064	1.182	17.854	1.067	1.194
70	23.941	1.001	1.072	15.354	1.103	1.236	15.410	1.109	1.252
75	20.887	1.023	1.098	13.390	1.143	1.291	13.435	1.152	1.312
80	18.381	1.047	1.125	11.780	1.185	1.349	11.817	1.198	1.375
85	16.300	1.069	1.151	10.443	1.229	1.408	10.474	1.245	1.441
90	14.553	1.091	1.176	9.321	1.274	1.469	9.347	1.294	1.508
95	13.073	1.113	1.202	8.371	1.320	1.531	8.393	1.345	x
100	11.807	1.134	1.228	7.559	1.368	1.595	7.577	1.397	x

x ... Konvergenzprobleme vor Erreichen der Grenzlast

λ^{24} ... Laststufe bei $\sigma_R = 24.0 \text{ kN/cm}^2$

λ^{36} ... Laststufe bei $\sigma_R = 36.0 \text{ kN/cm}^2$

Tabelle D.7: Tragreserven numerisch, **RB 0**, SHELL9n

b/t	$\alpha = 0.5$			$\alpha = 1.0$			$\alpha = 2.0$		
	λ^c	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	λ^c	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	λ^c	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$
50	47.481	-	-	30.505	-	1.043	30.496	-	1.045
55	39.274	-	-	25.218	-	1.104	25.211	-	1.109
60	33.023	-	1.024	21.195	1.032	1.168	21.189	1.034	1.176
65	28.152	-	1.070	18.062	1.081	1.237	18.058	1.084	1.248
70	24.284	-	1.112	15.576	1.132	1.308	15.572	1.138	1.323
75	21.161	1.037	1.152	13.570	1.186	1.384	13.567	1.194	1.403
80	18.603	1.075	1.191	11.928	1.242	1.463	11.925	1.253	1.486
85	16.483	1.109	1.231	10.567	1.301	1.545	10.564	1.315	1.573
90	14.705	1.143	1.270	9.426	1.362	1.632	9.423	1.379	1.664
95	13.200	1.176	1.309	8.460	1.426	1.722	8.458	1.446	1.760
100	11.914	1.208	1.350	7.636	1.492	1.817	7.634	1.516	1.861

Tabelle D.8: Tragreserven numerisch, **RB 0**, SHELL3n

b/t	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 1.0$		$\alpha = 2.0$	
	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$
50	-	-	-	1.040	-	1.040
55	-	-	-	1.092	-	1.092
60	-	1.026	1.030	1.148	1.030	1.148
65	-	1.074	1.071	1.207	1.071	1.207
70	1.010	1.125	1.115	1.270	1.115	1.270
75	1.037	1.174	1.161	1.335	1.162	1.336
80	1.077	1.226	1.210	1.404	1.211	1.406
85	1.117	1.276	1.261	1.476	1.262	1.478
90	1.159	1.328	1.314	1.551	1.316	1.554
95	1.199	1.381	1.370	1.628	1.372	1.632
100	1.242	1.432	1.427	1.709	1.429	x

Tabelle D.9: Tragreserven numerisch, **RB c(α)a**, SHELL9n

b/t	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 1.0$		$\alpha = 2.0$	
	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$
50	-	-	-	1.045	-	1.046
55	-	-	-	1.109	-	1.111
60	-	1.025	1.034	1.179	1.034	1.181
65	-	1.078	1.085	1.253	1.086	1.256
70	-	1.133	1.139	1.332	1.141	1.336
75	1.038	1.189	1.197	1.415	1.200	1.421
80	1.082	1.246	1.258	1.503	1.262	1.510
85	1.127	1.304	1.323	1.596	1.327	1.604
90	1.173	1.363	1.390	1.693	1.396	1.703
95	1.219	1.422	1.461	1.794	1.467	1.806
100	1.266	1.482	1.534	1.900	1.542	1.914

Tabelle D.10: Tragreserven numerisch, **RB c(α)a**, SHELL3n

b/t	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 1.0$		$\alpha = 2.0$	
	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$
50	-	-	-	1.074	-	1.072
55	-	-	-	1.167	-	1.165
60	-	1.031	1.055	1.268	1.053	1.266
65	-	1.087	1.129	1.378	1.127	x
70	1.010	1.145	1.208	1.498	1.207	x
75	1.043	1.205	1.294	1.625	1.292	x
80	1.090	1.266	1.385	1.762	1.383	x
85	1.137	1.329	1.481	1.909	x	x
90	1.186	1.394	1.584	2.065	x	x
95	1.235	1.459	1.693	2.232	x	x
100	1.287	1.527	1.808	2.411	x	x

Tabelle D.11: Tragreserven numerisch, **RB** $c(\alpha)b$, SHELL9n

b/t	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 1.0$		$\alpha = 2.0$	
	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{24}}{\lambda^c}$	$\frac{\lambda^{36}}{\lambda^c}$
50	-	-	-	1.088	-	1.089
55	-	-	-	1.213	-	1.213
60	-	1.029	1.065	1.349	1.065	1.351
65	-	1.092	1.164	1.499	1.164	1.501
70	-	1.158	1.271	1.661	1.272	1.664
75	1.045	1.227	1.386	1.837	1.387	1.840
80	1.097	1.299	1.509	2.027	1.511	2.031
85	1.151	1.373	1.642	2.231	1.644	2.236
90	1.207	1.449	1.783	2.451	1.786	2.456
95	1.265	1.528	1.934	2.686	1.937	2.693
100	1.324	1.610	2.094	2.939	2.098	2.946

Tabelle D.12: Tragreserven numerisch, **RB** $c(\alpha)b$, SHELL3n

D.2 Lineare Stabilitätsanalyse - Schalensegment

In den folgenden Tabellen sind sämtliche Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalysen aus Abschn. 4.5 aufgeführt. Neben den zu den 3 niedrigsten Eigenwerten gehörenden kritischen Lastparametern werden die Formen der zugehörigen Eigenformen angegeben. Mit x wird dabei die aus der Ansicht der Eigenform ermittelte Anzahl der Beulhalbwellen in Längsrichtung, mit o der Beulhalbwellen in Umfangsrichtung gekennzeichnet. Zusätzlich wurde das Produkt aus Lastvektor \mathbf{F} und Singulärvektor Φ^c im kleinsten kritischen Punkt berechnet.

K^S		$\lambda_{l,1}^c = \lambda^c$	$\lambda_{l,2}^c / \lambda^c$	$\lambda_{l,3}^c / \lambda^c$	$\mathbf{F}^T \Phi^c$ ($\ \Phi^c\ = 1.0$)
1	RB P1	189.310 x	1.534 xx	2.639 xxx	3.548e-5
	RB P2	255.120 x	1.296 xx	2.194 xxx	7.349e-3
	RB F1	401.780 xx	1.352 xxx	1.615 x	-3.071e-10
	RB F2	334.060 xx	1.010 x	1.538 xxx	6.099e-9
	RB F3	399.900 xx	1.165 x	1.548 xxx	2.391e-10
2		190.280 x	1.531 xx	2.630 xxx	7.095e-5
		251.020 x	1.308 xx	2.200 xxx	1.443e-2
		401.580 xx	1.344 xxx	1.594 x	4.861e-11
		337.770 xx	1.025 x	1.526 xxx	6.571e-10
		403.100 xx	1.174 x	1.541 xxx	-1.871e-10
3		191.880 x	1.527 xx	2.616 xxx	1.064e-4
		245.850 x	1.323 xx	2.202 xxx	2.107e-2
		401.400 xx	1.332 xxx	1.563 x	4.958e-11
		343.930 xx	1.049 x	1.507 xxx	2.260e-10
		408.450 xx	1.189 x	1.530 xxx	-1.232e-10
4		194.110 x	1.521 xx	2.596 xxx	1.418e-4
		241.100 x	1.337 xx	2.197 xxx	-2.726e-2
		401.420 xx	1.315 xxx	1.527 x	-1.197e-10
		352.520 xx	1.082 x	1.4817 xxx	1.183e-10
		415.970 xx	1.208 x	1.517 xxx	-2.431e-10
5		196.970 x	1.514 xx	2.572 xxx	1.771e-4
		237.880 x	1.347 xx	2.179 xxx	-3.330e-2
		401.860 xx	1.294 xxx	1.491 x	-7.765e-11
		363.510 xx	1.122 x	1.452 xxx	-1.587e-10
		425.680 xx	1.228 x	1.503 xxx	-1.588e-10
6		200.450 x	1.506 xx	2.543 xxx	2.123e-4
		236.790 x	1.350 xx	2.148 xxx	3.852e-2
		402.930 xx	1.269 x	1.457 xxx	1.809e-11
		376.870 xx	1.168 x	1.420 xxx	-6.331e-11
		437.610 xx	1.248 x	1.492 xxx	-3.891e-10

Tabelle D.13: Lineare Stabilitätsanalyse - Beullasten $K^S = 1 - 6$, Modell M2

K^S		$\lambda_{l,1}^c = \lambda^c$	$\lambda_{l,2}^c/\lambda^c$	$\lambda_{l,3}^c/\lambda^c$	$\mathbf{F}^T \Phi^c$ ($\ \Phi^c\ = 1.0$)
7	RB P1	204.530 x	1.496 xx	2.511 xxx	2.474e-4
	RB P2	238.090 x	1.346 xx	2.105 xxx	4.379e-2
	RB F1	404.850 xx	1.242 x	1.426 xxx	5.321e-10
	RB F2	392.540 xx	1.216 x	1.390 xxx	6.518e-10
	RB F3	451.780 xx	1.261 xxx	1.488 x	-3.608e-10
8		209.200 x	1.486 xx	2.476 xxx	2.824e-4
		241.790 x	1.338 xx	2.052 xxx	4.892e-2
		407.780 xx	1.215 x	1.398 xxx	1.168e-9
		410.510 xx	1.253 x	1.373 xxx	2.524e-9
		468.200 xx	1.263 xxx	1.496 x	-4.140e-10
9		214.450 x	1.475 xx	2.439 xxx	3.173e-4
		247.820 x	1.325 xx	1.990 xxx	5.399e-2
		411.870 xx	1.189 x	1.371 xxx	-7.927e-9
		430.730 xx	1.256 xxx	1.392 x	1.467e-8
		486.870 xx	1.253 xxx	1.517 x	6.452e-10
10		220.260 x	1.464 xx	2.401 xxx	3.520e-4
		256.070 x	1.308 xx	1.924 xxx	5.903e-2
		417.210 xx	1.165 x	1.346 xxx	-5.008e-8
		453.160 xx	1.230 xxx	1.442 x	2.340e-9
		507.790 xx	1.233 xxx	1.549 x	-2.835e-10
11		226.610 x	1.453 xx	2.362 xxx	3.865e-4
		266.400 x	1.290 xx	1.854 xxx	6.408e-2
		423.890 xx	1.143 x	1.3216 xxx	1.118e-7
		477.760 xx	1.195 xxx	1.501 x	4.599e-10
		530.940 xx	1.208 xxx	1.587 x	-7.133e-11
12		233.470 x	1.441 xx	2.322 xxx	4.209e-4
		278.700 x	1.270 xx	1.784 xxx	-6.916e-2
		431.960 xx	1.123 x	1.298 xxx	2.724e-7
		504.500 xx	1.159 xxx	1.562 x	-9.486e-11
		556.320 xx	1.178 xxx	1.628 x	6.938e-12
13		240.840 x	1.430 xx	2.283 xxx	-4.550e-4
		292.870 x	1.251 xx	1.715 xxx	7.429e-2
		441.440 xx	1.106 x	1.274 xxx	2.570e-7
		533.320 xx	1.123 xxx	1.554 xxxxx	1.886e-11
		583.900 xx	1.148 xxx	1.628 xxxxx	-1.524e-12
14		248.670 x	1.419 xx	2.244 xxx	-4.888e-4
		308.820 x	1.231 xx	1.648 xxx	-7.948e-2
		452.340 xx	1.090 x	1.252 xxx	2.861e-7
		564.170 xx	1.088 xxx	1.487 xxxxx	-4.889e-11
		613.640 xx	1.117 xxx	1.562 xxxxx	9.175e-12
15		256.960 x	1.408 xx	2.207 xxx	5.224e-4
		326.470 x	1.212 xx	1.583 xxx	8.475e-2
		464.690 xx	1.076 x	1.229 xxx	1.496e-7
		596.970 xx	1.055 xxx	1.423 xxxxx	2.588e-10
		645.500 xx	1.086 xxx	1.498 xxxxx	4.978e-11

Tabelle D.14: Lineare Stabilitätsanalyse-Beullasten $K^S = 7 - 15$, Modell M2

K^S		$\lambda_{l,1}^c = \lambda^c$		$\lambda_{l,2}^c/\lambda^c$		$\lambda_{l,3}^c/\lambda^c$		$\mathbf{F}^T \Phi^c$ ($\ \Phi^c\ = 1.0$)
16	RB P1	265.670	x	1.398	xx	2.171	xxx	5.557e-4
	RB P2	345.770	x	1.194	xx	1.522	xxx	9.009e-2
	RB F1	478.480	xx	1.064	x	1.208	xxx	1.066e-7
	RB F2	631.630	xx	1.023	xxx	1.363	xxxx	3.307e-10
	RB F3	679.410	xx	1.056	xxx	1.437	xxxx	5.063e-9
17		274.770	x	1.388	xx	2.137	xxx	-5.886e-4
		366.650	x	1.178	xx	1.465	xxx	9.553e-2
		493.710	xx	1.053	x	1.187	xxx	-1.015e-7
		663.430	xxx	1.007	xx	1.317	xxxx	-7.836e-2
		715.300	xx	1.028	xxx	1.380	xxxx	-3.568e-8
18		284.240	x	1.379	xx	2.105	xxx	6.212e-4
		389.060	x	1.162	xx	1.411	xxx	-1.011e-1
		510.370	xx	1.043	x	1.167	xxx	1.377e-7
		681.690	xxx	1.036	xx	1.301	xxxx	-8.141e-2
		753.050	xx	1.001	xxx	1.326	xxxx	9.059e-8
19		294.060	x	1.371	xx	2.075	xxx	6.533e-4
		412.960	x	1.148	xx	1.361	xxx	-1.067e-1
		528.460	xx	1.033	x	1.148	xxx	-1.294e-7
		700.820	xxx	1.063	xx	1.287	xxxx	-8.460e-2
		772.990	xxx	1.025	xx	1.308	xxxx	3.136e-2
20		304.190	x	1.363	xx	2.047	xxx	6.850e-4
		438.280	x	1.135	xx	1.315	xxx	1.125e-1
		547.970	xx	1.024	x	1.130	xxx	2.141e-7
		720.800	xxx	1.088	xx	1.275	xxxx	-8.793e-2
		793.250	xxx	1.051	xx	1.291	xxxx	3.368e-2
21		314.610	x	1.355	xx	2.021	xxx	7.162e-4
		464.980	x	1.124	xx	1.273	xxx	1.184e-1
		568.910	xx	1.015	x	1.114	xxx	-2.707e-7
		741.640	xxx	1.110	xx	1.266	xxxx	-9.137e-2
		814.470	xxx	1.075	xx	1.276	xxxx	3.599e-2
22		325.290	x	1.349	xx	1.998	xxx	7.469e-4
		492.960	x	1.113	xx	1.234	xxx	1.244e-1
		591.250	xx	1.005	x	1.099	xxx	-1.154e-7
		763.330	xxx	1.127	xx	1.261	xxxx	-9.492e-2
		836.640	xxx	1.097	xx	1.263	xxxx	3.831e-2
23		336.220	x	1.342	xx	1.977	xxx	7.770e-4
		522.150	x	1.105	xx	1.199	xxx	1.305e-1
		612.260	x	1.004	xx	1.091	xxx	1.305e-1
		785.870	xxx	1.136	xxxx	1.264	xxxx	9.857e-2
		859.760	xxx	1.115	xx	1.253	xxxx	4.063e-2
24		347.370	x	1.337	xx	1.958	xxx	8.065e-4
		552.410	x	1.098	xx	1.168	xxx	1.368e-1
		630.850	x	1.015	xx	1.090	xxx	1.352e-1
		809.250	xxx	1.138	xxxx	1.275	xxxx	-1.023e-1
		883.820	xxx	1.128	xx	1.248	xxxx	4.298e-2

Tabelle D.15: Lineare Stabilitätsanalyse-Beullasten $K^S = 16-24$, Modell M2

K^S		$\lambda_{l,1}^c = \lambda^c$	$\lambda_{l,2}^c/\lambda^c$	$\lambda_{l,3}^c/\lambda^c$	$\mathbf{F}^T \Phi^c$ ($\ \Phi^c\ = 1.0$)
25	RB P1	358.710 x	1.331 xx	1.941 xxx	8.353e-4
	RB P2	583.560 x	1.092 xx	1.141 xxx	1.433e-1
	RB F1	649.990 x	1.026 xx	1.092 xxx	1.395e-1
	RB F2	833.460 xxx	1.133 xxxx	1.291 xxxx	1.062e-1
	RB F3	908.810 xxx	1.134 xxxx	1.251 xxxx	4.535e-2
26		370.240 x	1.326 xx	1.927 xxx	8.634e-4
		615.330 x	1.088 xx	1.118 xxx	1.497e-1
		669.680 x	1.037 xx	1.096 xxx	-1.432e-1
		858.490 xxx	1.124 xxxx	1.305 oooooo	1.110e-1
		934.720 xxx	1.133 xxxx	1.260 xxxx	4.775e-2
27		381.930 x	1.322 xx	1.914 xxx	8.907e-4
		647.310 x	1.087 xx	1.101 xxx	-1.561e-1
		689.940 x	1.049 xx	1.101 xxx	-1.463e-1
		884.320 xxx	1.113 xxxx	1.285 oooooo	1.114e-1
		961.520 xxx	1.126 xxxx	1.274 xxxx	5.020e-2
28		393.760 x	1.318 xx	1.903 xxx	9.171e-4
		679.020 x	1.088 xx	1.089 xxx	-1.619e-1
		710.820 x	1.061 xx	1.108 xxx	1.488e-1
		910.930 xxx	1.101 xxxx	1.265 oooooo	1.183e-1
		989.210 xxx	1.116 xxxx	1.290 xx	5.270e-2
29		405.730 x	1.314 xx	1.894 xxx	9.428e-4
		709.960 x	1.084 xxx	1.092 xx	-1.667e-1
		732.390 x	1.072 xx	1.116 xxx	1.508e-1
		938.310 xxx	1.089 xxxx	1.247 oooooo	-1.225e-1
		1017.800 xxx	1.104 xxxx	1.307 xx	5.525e-2
30		417.830 x	1.310 xx	1.886 xxx	9.675e-4
		739.910 x	1.084 xxx	1.098 xx	-1.696e-1
		754.700 x	1.083 xx	1.124 xxx	-1.523e-1
		966.430 xxx	1.077 xxxx	1.228 oooooo	1.269e-1
		1047.100 xxx	1.092 xxxx	1.324 xx	5.787e-2

Tabelle D.16: Lineare Stabilitätsanalyse-Beullasten $K^S = 25-30$, Modell M2

D.3 Nachbeulanalyse - Schalensegment

Für die allseitig gelenkig gelagerten Schalensegmente - **RB P1** und **RB P2** - erfolgten Nachbeuluntersuchungen. Die berechneten Nachbeulparameter $\dot{\lambda}$ und $\ddot{\lambda}$ für **RB P1** enthalten Tab. D.17 - Tab. D.19. Daneben sind die zur Berechnung benötigten nicht vektoriellen Koeffizienten A, B, C usw. aufgeführt. Für Schalensegmente ab $K^S = 16$ konnte lediglich $\dot{\lambda}$ zuverlässig bestimmt werden.

Für **RB P2** sind die Ergebnisse in Tab. D.20 zu finden. Hier wurde sich von vornherein auf die Ermittlung von $\dot{\lambda}$ beschränkt. Da die Größen $\dot{\lambda}$ bzw. $\ddot{\lambda}$ unmittelbar abhängig von der gewählten Normierung sind, ist in den Tabellen ebenfalls der konkrete Wert für den Parameter α aufgeführt. Unterschiedliche Vorzeichen für A, C und α in Tab. D.20 sind in verschiedenen Richtungen für Φ^c begründet.

K^S	A B C	$\dot{\lambda}$	D F G H	$\ddot{\lambda}$	α
1	0.001162 -0.00155 4.9126e-8	7.457	0.008401 9.3457e-8 6.4712e-6 -5.3747e-11	61.287	19.899
2	0.005158 -0.00264 1.2763e-7	14.875	0.024375 4.1721e-7 1.1142e-5 -1.3766e-10	61.081	15.250
3	0.009484 -0.00304 2.0355e-7	22.215	0.032137 7.7447e-7 1.3020e-5 -2.1457e-10	61.076	14.238
4	0.013591 -0.00320 2.7551e-7	29.440	0.035632 1.1241e-6 1.4046e-5 -2.8084e-10	61.150	13.884
5	0.017465 -0.003285 3.4364e-7	36.512	0.037309 1.4671e-6 1.4819e-5 -3.3419e-10	61.323	13.737

Tabelle D.17: Nachbeulanalyse, Modell M1, **RB P1**, $K^S = 1 - 5$

K^S	A B C	λ	D F G H	$\acute{\lambda}$	α
6	0.021120 -0.003328 4.0788e-7	43.394	0.038124 1.8060e-6 1.5539e-5 -3.7164e-10	61.640	13.678
7	0.024559 -0.003353 4.6806e-7	50.050	0.038478 2.1415e-6 1.6284e-5 -3.8965e-10	62.153	13.665
8	0.027778 -0.003366 5.2401e-7	56.446	0.038562 2.4729e-6 1.7091e-5 -3.8414e-10	62.922	13.680
9	0.030796 -0.003373 5.7559e-7	62.596	0.038462 2.8011e-6 1.7981e-5 -3.0543e-10	64.086	13.711
10	0.033552 -0.003376 6.2287e-7	68.387	0.038260 3.1177e-6 1.8966e-5 -2.3241e-10	65.563	13.760
11	0.036061 -0.003376 6.6584e-7	73.830	0.037982 3.4218e-6 2.0055e-5 -1.2073e-10	67.478	13.822
12	0.038316 -0.003374 7.0462e-7	78.902	0.037654 3.7094e-6 2.1255e-5 3.5307e-11	69.884	13.895
13	0.040312 -0.003371 7.3937e-7	83.581	0.037288 3.9765e-6 1.5751e-5 1.6879e-10	59.091	13.978
14	0.042049 -0.003367 7.7029e-7	87.851	0.036913 4.2189e-6 1.6749e-5 3.5195e-10	60.184	14.071
15	0.043527 -0.003364 7.9761e-7	91.702	0.036535 4.4329e-6 1.7833e-5 5.7856e-10	61.661	14.172

Tabelle D.18: Nachbeulanalyse, Modell M1, **RB P1**, $K^S = 6 - 15$

K^S	A	B	C	λ	α
16	0.044752	-0.003360	8.2159e-7	95.125	14.283
17	0.045730	-0.003356	8.4247e-7	98.119	14.402
18	0.046473	-0.003353	8.6051e-7	100.690	14.529
19	0.046992	-0.003350	8.7595e-7	102.840	14.664
20	0.047302	-0.003348	8.8900e-7	104.580	14.807
21	0.047419	-0.003347	8.9991e-7	105.940	14.957
22	0.047359	-0.003347	9.0884e-7	106.930	15.115
23	0.047141	-0.003348	9.1596e-7	107.580	15.279
24	0.046781	-0.003349	9.2143e-7	107.910	15.450
25	0.046290	-0.003351	9.2539e-7	107.940	15.627
26	0.045697	-0.003354	9.2795e-7	107.700	15.809
27	0.045003	-0.003357	9.2920e-7	107.210	15.997
28	0.044224	-0.003361	9.2924e-7	106.510	16.189
29	0.043371	-0.003365	9.2814e-7	105.590	16.385
30	0.042453	-0.003369	9.2597e-7	104.490	16.585

Tabelle D.19: Nachbeulanalyse, Modell M1, **RB P1**, $K^S = 16 - 30$

K^S	A	B	C	$\dot{\lambda}$	α
1	-0.006966	-0.004301	-2.7476e-5	16.924	-20.896
2	-0.014273	-0.004310	-5.3683e-5	34.564	-20.875
3	-0.022136	-0.004339	-7.7724e-5	53.177	-20.845
4	0.030613	-0.004396	9.9182e-5	72.450	20.810
5	0.039641	-0.004488	1.1799e-4	91.750	20.775
6	-0.04911	-0.004611	-1.3427e-4	110.450	-20.740
7	-0.05889	-0.004759	-1.4818e-4	128.140	-20.707
8	-0.06889	-0.004923	-1.5989e-4	144.650	-20.676
9	-0.07901	-0.005098	-1.6958e-4	160.000	-20.645
10	-0.08921	-0.005274	-1.7741e-4	174.340	-20.615
11	-0.09943	-0.005449	-1.8358e-4	187.820	-20.584
12	0.10966	-0.005617	1.8827e-4	200.620	20.551
13	-0.11989	-0.005777	-1.9168e-4	212.890	-20.514
14	0.13013	-0.005927	1.9399e-4	224.750	20.474
15	-0.14038	-0.006068	-1.9537e-4	236.290	-20.427
16	-0.15070	-0.006199	-1.9598e-4	247.600	-20.373
17	-0.16112	-0.006324	-1.9598e-4	258.720	-20.309
18	0.17175	-0.006442	1.9547e-4	269.700	20.231
19	0.18270	-0.006556	1.9459e-4	280.580	20.137
20	-0.19418	-0.006672	-1.9341e-4	291.370	-20.022
21	-0.20646	-0.006793	-1.9204e-4	302.120	-19.880
22	-0.22004	-0.006928	-1.9055e-4	312.850	-19.701
23	-0.23567	-0.007092	-1.8901e-4	323.580	-19.476
24	-0.25464	-0.007308	-1.8750e-4	334.300	-19.188
25	-0.27917	-0.007616	-1.8607e-4	344.920	-18.818
26	-0.31313	-0.008089	-1.8477e-4	355.050	-18.345
27	0.36287	-0.008859	1.8355e-4	363.520	17.751
28	0.43710	-0.010128	1.8219e-4	367.800	17.044
29	0.54257	-0.012126	1.8016e-4	364.380	16.287
30	0.67398	-0.014941	1.7681e-4	351.500	15.584

Tabelle D.20: Nachbeulanalyse, Modell M1, **RB P2**, $K^S = 1 - 30$

K^S	Approximation		Pfadwechsel	
	λ^{NB}/λ^c	w^{NB}	λ^{NB}/λ^c	w^{NB}
1	0.998	-0.122	0.992	-0.101
2	0.991	-0.243	0.981	-0.222
3	0.979	-0.364	0.969	-0.354
4	0.964	-0.481	0.954	-0.459
5	0.945	-0.595	0.934	-0.586
6	0.924	-0.704	0.912	-0.712
7	0.901	-0.805	0.886	-0.837
8	0.879	-0.897	0.857	-0.961
9	0.857	-0.977	0.827	-1.086
10	0.838	-1.043	0.795	-1.210
11	0.822	-1.094	0.762	-1.334
12	0.809	-1.129	0.728	-1.480
13	0.755	-1.414	0.694	-1.603
14	0.742	-1.460	0.659	-1.725
15	0.735	-1.487	0.625	-1.869
16	-	-	0.591	-2.012
17	-	-	0.558	-2.153
18	-	-	0.525	-2.316
19	-	-	0.494	-2.453
20	-	-	0.463	-2.611
21	-	-	0.433	-2.766
22	-	-	0.404	-2.939
23	-	-	0.377	-3.108
24	-	-	0.350	-3.294
25	-	-	0.324	-3.475
26	-	-	0.300	-3.670
27	-	-	0.276	-3.884
28	-	-	0.254	-4.088
29	-	-	0.232	-4.283
30	-	-	-	-

Tabelle D.21: Nachbeulminima, Modell M1, **RB P1**

Literaturverzeichnis

- [1] ANSYS: *Rev. 5.3, Swanson Analysis Systems*, Houston, USA, 1996
- [2] Bayer, V., Bucher, C., Ebert, M. u.a.: *SLang - the Structural Language, Version 5.0*, Institute of Structural Mechanics, Bauhaus - University Weimar, August 2003
- [3] Bernard, E.S., Bridge, R.Q., Hancock, G.J.: *Tests on profiled steel decks with V-stiffeners*, Journal of Struct. Eng., ASCE, Vol.119, 1993
- [4] Brendel, B.: *Zur geometrisch nichtlinearen Elastostabilität*, Diss. Universität Stuttgart, 1979
- [5] Brezzi, F., Cornalba, M., Di Carlo, A.: *How to get around a simple quadratic fold*, Num. Math., Vol. 48, 1986
- [6] Bucher, C., Schorling, Y., Wall, W.: *SLang - the Structural Language, a Tool for Computational Stochastic Structural Analysis*, In: Sture, S. (Hrsg.): *Proc. 10th ASCE Eng. Mech. Conf., Boulder, CO, May 21 - 24, 1995*. New York: ASCE, 1995, S. 1123 - 1126
- [7] Budiansky, B.: *Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures*, Adv. Appl. Mech., Vol.14, ACADEMIC PRESS, New York, 1974
- [8] Bürgermeister, G., Steup, H., Kretzschmar, H.: *Stabilitätstheorie - Mit Erläuterungen zu den Knick- und Beulvorschriften, Teil I und II*, Akademie - Verlag Berlin, 1959 u. 1963
- [9] Casciaro, R., Salerno, G., Lanzo, A. D.: *Finite Element asymptotic analysis of slender elastic structures: a simple approach*, Int. journal for num. methods in eng., Vol. 35, 1992
- [10] Crisfield, M. A.: *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through*, Computers and Structures, Vol. 13, 1981
- [11] Crisfield, M. A.: *Non - linear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley&Sons, 1997

- [12] Det Norske Veritas (Hrsg.): *Recommended Practice DNV-RP-C202: Buckling Strength of Shells*, Okt.2002
- [13] Deutscher Ausschuss für Stahlbau (Hrsg.): *E-DAST-Richtlinie 017 Entwurf: Beulsicherheitsnachweis für Schalen - spezielle Fälle*, Stahlbau - Verlagsgesellschaft, Köln 1992
- [14] Dubina, D.: *Session 3 - General Report - Coupled instabilities in bar members*, In: Proceedings of 2nd International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, Imperial College Press, London, 1996
- [15] Düsing, Heribert E.: *Stabilität längsversteifter stählerner Kreiszyinderschalen unter zentrischem Axialdruck - Theoretische Grundlagen und baupraktischer Beulsicherheitsnachweis* -, Diss., Universität GH Essen, 1994
- [16] Eckstein, U.: *Nichtlineare Stabilitätsberechnung elastischer Schalentragswerke*, Tech. Rep. No. 83-3, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1983
- [17] Eggert, H.: *Ein Beitrag zum Problem der Mindeststeifigkeit bei Schalen*, Diss. TH Darmstadt, 1965
- [18] Engeln - Müller, Reuter: *Numerische Mathematik für Ingenieure*, B. I. - Wissenschaftsverlag, 1985
- [19] Eriksson, A.: *Fold lines for imperfection analyses at critical equilibrium*. In: Hirsch, C. et al.: *Numerical Methods in Engineering*, Elsevier Science Publishers B. V.
- [20] Friedrich+Lochner GmbH Stuttgart: *Programm Plattenbeulen Stahl PLII Version 1.2001*
- [21] Fujii, F., Ramm, E.: *Computational bifurcation theory - path tracing, pin-pointing and path - switching*, International Conference on „Stability of Structures“ ICSS 95, Coimbatore, India, June 1995
- [22] Gioncu, V.: *General theory of elastic stability*, Thin-Walled Structures, Elsevier Vol.19, 1994
- [23] Godoy, L.A.: *Theory of elastic stability: analysis and sensitivity*, Taylor and Francis, USA, 1999
- [24] Jürcke, R.K.: *Zur Stabilität und Imperfektionsempfindlichkeit elastischer Schalentragswerke - Finite Element Formulierung der Anfangs-Nachbeul-Theorie*, Tech. Rep. No. 85-5, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1985

- [25] Klöppel, K., Scheer, J.: *Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten*, W.Ernst und Sohn, Berlin, 1960
- [26] Klöppel, K., Möller, K.H.: *Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten, Band II*, W.Ernst und Sohn, Berlin, 1968
- [27] Klöppel, K., Lie, K.H.: *Das hinreichende Kriterium für den Verzweigungspunkt des elastischen Gleichgewichts*, Stahlbau Nr.16, 1943
- [28] Koiter, W.T.: *On the stability of elastic equilibrium*, Ph.D. Thesis, Delft, 1945, engl. transl. NASA TT F-10, 833, 1967
- [29] Koiter, W.T.: *Buckling and postbuckling behaviour of a cylindrical panel under axial compression*, Rep. Trans. Nat. Aero. Res. Inst. 20, 1956
- [30] Koiter, W.T.: *The interaction between local buckling and overall buckling on the behaviour of built-up columns*, Report No.447, Laboratory of Engineering Mechanics, Delft University of Technology, May 1971
- [31] Kouhia, R., Mikkola, M.: *Tracing the equilibrium path beyond simple critical points*, Int. journal for num. methods in eng., Vol. 28, 1989
- [32] Kutzelnigg, E.: *Beulwertdiagramme für Stegbleche ohne Zwischensteifen nach der linearen Beultheorie bei Berücksichtigung von in Trägerlängsrichtung veränderlichen Spannungen und der Torsionssteifigkeit der Trägergurte*, Der Stahlbau 47, 1978
- [33] Lanzo, A. D, Garcea, G., Casciaro, R.: *Asymptotic post-buckling analysis of rectangular plates by HC Finite Elements*, Int. journal for num. methods in eng., Vol. 38, 1995
- [34] Lanzo, A.D., Garcea, G.: *Koiter's analysis of thin-walled structures by a finite element approach*, Int. journal for num. methods in eng., Vol. 39, 1996
- [35] Lehmkuhl, H., Werner, F.: *Use of numerical methods for practical analyses of structural elements*, Third international conference on coupled instabilities in metal structures CIMS'2000, Lisbon, Portugal, 2000
- [36] Lindner, J., Scheer, J., Schmidt, H.: *Stahlbauten: Erläuterungen zu DIN 18800 Teil 1 bis Teil 4*, Beuth Verlag GmbH, Berlin, Köln, Ernst & Sohn, Berlin, 1998
- [37] Mang, H.: *On special points on load - displacement paths in the prebuckling domain of thin shells*, Int. journal for num. methods in eng., Vol. 31, 1991

- [38] NABau im DIN (Hrsg.): *DIN 18800 Teil 2: Stahlbauten Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken*, Beuth - Verlag Berlin/Köln, November 1990
- [39] NABau im DIN (Hrsg.): *DIN 18800 Teil 3: Stahlbauten Stabilitätsfälle, Plattenbeulen*, Beuth - Verlag Berlin/Köln, November 1990
- [40] NABau im DIN (Hrsg.): *DIN 18800 Teil 4: Stahlbauten Stabilitätsfälle, Schalenbeulen*, Beuth - Verlag Berlin/Köln, November 1990
- [41] Nelson, R. B.: *Simplified calculations of eigenvector derivatives*, AIAA Journal, Vol. 14, 1976
- [42] Petersen, C.: *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen*, Vieweg, Wiesbaden, 1982
- [43] Pignataro, M., Rizzi, N., Luongo, A.: *Stability, bifurcation and postcritical behaviour of elastic structures*, ELSEVIER, Amsterdam, 1991
- [44] Pignataro, M., Pasca, M., Franchin, P.: *Post-buckling analysis of corrugated panels in the presence of multiple interacting modes*, Thin-Walled Structures, Elsevier Vol.36, 2000
- [45] Pignataro, M., Luongo, A.: *Asymmetric Interactive Buckling of Thin-Walled Columns with Initial Imperfections*, Thin-Walled Structures, Elsevier Vol.5, 1987
- [46] Ramm, R.: *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente*, Bericht Nr.76 - 2, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1976
- [47] Ramm, E.: *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*, In: Wunderlich, W., Stein, E., Bathe, K.-J.: *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981
- [48] Rasmussen, K.J.R.: *State of the art of numerical simulation and computational models in coupled instabilities*, Institut BKM, Technical University of Denmark, Serie R, No.4, 1996
- [49] Reitinger, R.: *Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke*, Bericht Nr.17, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1994
- [50] Riks, E.: *The application of newtons method to the problem of elastic stability*, Journal Appl. Mech., Vol. 39, 1972
- [51] Riks, E.: *Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 47, 1984

- [52] Roos, D.: *Approximation und Interpolation von Grenzzustandsfunktionen zur Sicherheitsbewertung nichtlinearer Finite - Elemente - Strukturen*, Diss. Bauhaus - Universität Weimar, Juli 2001
- [53] Salerno, G., Casciaro, R.: *Mode jumping and attractive paths in multi-mode elastic buckling*, Int. journal for num. methods in eng., Vol. 40, 1997
- [54] Schmidt, H.: *Beulsicherheitsnachweise für weitere versteifte Schalen sowie allgemeingültige Rechenkonzepte für komplexere Schalenstrukturen*, In: Stahlbau-Handbuch Band 1A, Deutscher Stahlbau-Verband DSTV, 1993
- [55] Schorling, Y.: *Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung von Strukturen mit räumlich korrelierten geometrischen Imperfektionen*, Diss., Bauhaus - Universität Weimar, Oktober 1996
- [56] Schwarz, H. R.: *Numerische Mathematik*, Teubner - Verlag, Stuttgart, 1997
- [57] Shi, J.: *Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by the finite element method*, Computers and Structures, Vol. 58, 1996
- [58] Thompson, J.M.T, Hunt, G.W.: *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley and Sons, London, 1973
- [59] Thompson, J.M.T: *Optimization as a Generator of Structural Instability*, Int. journal of Mech. Science, Vol.14, 1972
- [60] Valid, R.: *The nonlinear theory of shells through variational principles*, John Wiley and Sons, London, 1995
- [61] Wagner, W.: *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente*, Habilitationsschrift, Bericht Nr.F 91/1, Universität Hannover, 1991
- [62] Wagner, W., Wriggers P.: *A simple method for the calculation of postcritical branches*, Eng. Comput., Vol. 5, 1988
- [63] Winterstetter, T.: *Stabilität von Kreiszyinderschalen aus Stahl unter kombinierter Beanspruchung*, Diss. Universität GH Essen, 2000
- [64] Wolmir, A.S.: *Biegsame Platten und Schalen*, VEB Verlag für Bauwesen Berlin, 1962
- [65] Yamaki, N.: *Elastic stability of cylindrical shells*, North-Holland: Amsterdam, New York, Oxford, 1984